

開水路彎曲部の流れについて

小川 芳 昭*

目 次

§1. ま え が き	8
§2. 流速の横断分布	8
§3. 彎曲部の抵抗	10
§4. 彎曲部の水面形	10
§5. 境界層内の運動量方程式	11
§6. 運動量方程式の解	12
§7. む す び	15

§1. ま え が き

現実の流れはそのほとんどが三次元的である。しかし、多くの場合、流下方向の流れが支配的であるので、この流れすなわち主流のみを考察する一次元的な考えによって処理されている。しかしながら、彎曲部の流れを論ずるにはヘリカルな流れによって発生する断面内の二次流または副流を無視することはできない。水面幅 B と水深 H との比 H/B が大きく、摩擦の影響が小さなきは、自由渦の仮定が成り立つので取り扱いが比較的容易であり、従来もよく研究されていた。

一般河川では、 H/B は非常に小さく、かつ摩擦の影響は大であるから、横断水面形や流速分布などはほとんど自由渦の仮定に従がわない。ただ、石原**、村本***両氏が指摘しているように、二次流の発生機構が速度変動によるものでなければ、平均速度の場で説明できるから、彎曲部においても、接線方向の流速 V の分布を明らかにすることによって、水路抵抗、水面形、二次流の挙動などの解析が可能となる。

§2. 流速の横断分布

流れが、Potential Flow であれば直線水路において流れが持つ Specific Energy は一定であり、下流の各断面でも等しい値を持つはずである。しかし、彎曲部の入口では直線から曲線になるため、側壁近くでは水面のたかまりのため、一方は加速され一方は減速されて、流速の横断分布は

直線部と異なってくる。

2-1 彎曲部の流れが自由渦の場合

理想流体に対しては、流体微小体の equilibrium と Bernoulli の式から、流速分布式を求めることができる。

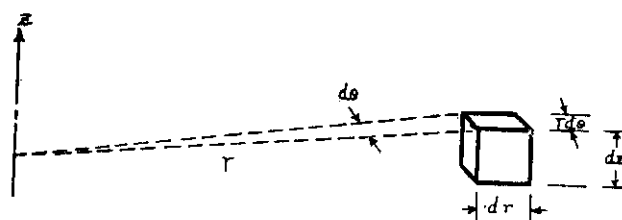


図-1

図-1 のように彎曲の中心に z 軸を持つ円筒座標系で流体の微小体を考える。ここで、半径方向の流速を U 、接線方向の流速を V とすれば

$$dr \left(\frac{dP}{dr} \right) r d\theta dz = \rho r d\theta dr dz \frac{V^2}{r}$$

であるから、

$$\frac{dP}{dr} = \rho \frac{V^2}{r} \quad (1)$$

水平面内で Bernoulli の式を考えると

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2g} = \text{const} \quad \text{であるから}$$

これを r で微分すれば

$$\frac{dP}{dr} = - \left(\frac{w}{g} \right) V \frac{dV}{dr} = - \rho V \frac{dV}{dr} \quad (2)$$

* 河川研究室副室長

** 石原藤次郎 京都大学工学部教授 工博

*** 村本喜雄 京都大学工学部

(1)と(2)から

$$\frac{V}{r} = -\frac{dV}{dr}$$

または

$$\left(\frac{r}{V}\right) \frac{dV}{dr} = -1 \quad (3)$$

(3)を積分すると

$$\frac{dr}{r} = -\frac{dV}{V}$$

であるから

$$\log r = -\log V + c$$

すなわち

$$rV = c \quad (4)$$

となり, Potential-Flow Vortex の横断分布式となる。

2-2 一般の場合

変数 $\left(\frac{r}{V}\right) \frac{dV}{dr}$ は log-log 紙に r と V をとったとき、勾配として与えられるが、自由渦に対しては -1 であり、一般の彎曲部については、すでに研究されたところによると -1 と $+1$ の範囲にある。また、与えられた条件で彎曲部の流れを解析するには、二次流の挙動を数学的に明らかにする必要がある。流れは、主流と二次流が互いに影響し合っその取り扱い是非常に複雑になるが、図-2のような断面の流れを仮定する。すなわち、断面内では上層のやや外壁に向かう厚い主流部分と外壁から次第に内壁に向けて発達する薄い境界層内の流れの二つに分けて考える。上層流の半径方向の流速を U 、接線方向の流速を V 、下層

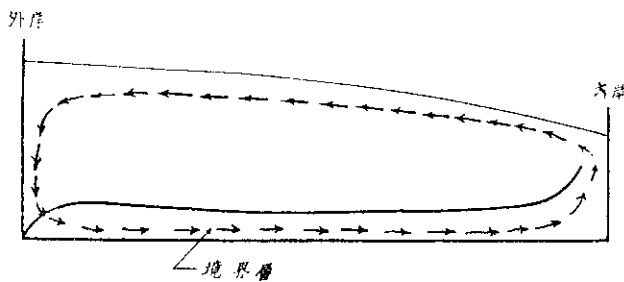


図-2

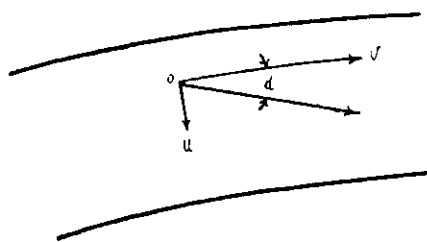


図-3

流の半径方向の流速を u 、接線方向の流速を v とする。上層流は下層流に比し大であるから、彎曲流の支配的要素であるが、境界層内の流れも、順次述べるように非常に大きい影響力を持っている。H. A. Einstein¹⁾ と J. A. Harder²⁾ は下層部分の分速度を図-3のように考えて、次式を提案した。

$$\left(\frac{r}{V}\right) \frac{dV}{dr} = f \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{c_2}\right) \left(\frac{\bar{V}^2}{Vv}\right) \left[\frac{h-\delta}{8R}\right] \left(\frac{r}{B}\right) \left[1 - \frac{S_f}{S}\right] - 1 \quad (4)$$

f ; 摩擦係数

α ; 境界層内の接線方向の流速と合成速度のなす角

c_2 ; 係数

\bar{V} ; 断面の平均流速 $\bar{V} = \frac{Q}{A}$

h ; r における水深

δ ; 平均境界層厚 $\delta = \frac{c_2 B}{\cos \alpha} \nu u$

B ; 水面幅

R ; 径深

S ; 接線方向の水面勾配

S_f ; 接線方向の摩擦勾配

(4)で、 δ が h に比しかなり小であれば、 $\frac{h-\delta}{8R} \doteq \text{const}$ $Vv \doteq V^2$ に近づく、さらに、 α が小で変化があまりないとすれば $\cos \alpha \doteq \text{const}$ となる。すなわち、水深に比し、曲率半径が大きいときは、

$$\left(\frac{r}{V}\right) \frac{dV}{dr} = cf \left(\frac{r}{B}\right) \left[1 - \frac{S_f}{S}\right] - 1 \quad (5)$$

となる。また、彎曲度が大きく二次流が十分発達した部分では、流れは等流に近づくから $S_f \doteq 0$ となる。

したがって、

$$\left(\frac{r}{V}\right) \frac{dV}{dr} = cf \left(\frac{r}{B}\right) - 1 \quad (6)$$

これを变形して

$$\frac{dV}{V} = \left[\frac{cf}{B} - \frac{1}{r} \right] dr$$

とおき積分すると

$$\ln V = cf \left(\frac{r}{B}\right) - \ln r + K$$

または

$$Vr = K e^{cf \left(\frac{r}{B}\right)} \quad (7)$$

K は積分定数

(7)は等流状態にある一般の彎曲部の流速の横断分布を表わす。

2-3 一般式の近似

(6)式を变形すると

$$\frac{r}{V} \frac{dV}{dr} + 1 = cf \left(\frac{r}{B} \right)$$

とおくと

$$\frac{1}{V} \left(r \frac{dV}{dr} + V \right) = \frac{1}{V} \frac{d(Vr)}{dr} = cf \left(\frac{r}{B} \right) \quad (8)$$

ここで(7)の近似式として

$$V = Kr^n \quad (9)$$

を用い、(9)を(8)に入れると

$$\frac{1}{Kr^n} \frac{d(Kr^{n+1})}{dr} = cf \left(\frac{r}{B} \right)$$

となるから

$$(n+1) = cf \left(\frac{r}{B} \right)$$

または

$$n = cf \left(\frac{r}{B} \right) - 1 \quad (10)$$

いま、 $\frac{B}{2}$ と r_0 の比が非常に大きいとし、 $\frac{r_0}{B} = \sigma$ とおけば(10)は近似的に

$$n \doteq cf - 1 \quad (11)$$

としてよい。

2-4 積分定数

$$\frac{V^2}{2g} + h = \text{const から}$$

$$\frac{1}{B} \int_{r_1}^{r_2} \frac{V^2}{2g} dr + \frac{1}{B} \int_{r_1}^{r_2} h dr = \frac{\bar{V}^2}{2g} + \bar{h} = \text{const} \quad (12)$$

r_1 = 内壁の曲率半径

r_2 = 外壁の曲率半径

$r_2 - r_1 = B$ 川幅

とおいて、積分定数 c および K を求めることができる。

自由渦の場合は

$$\frac{1}{B} \int_{r_1}^{r_2} \frac{V^2}{2g} dr + \frac{1}{B} \int_{r_1}^{r_2} h dr = \frac{\bar{V}^2}{2g} + \bar{h}$$

$$\frac{1}{B} \int_{r_1}^{r_2} h dr = \bar{h}$$

$$\frac{1}{B} \int_{r_1}^{r_2} \frac{V^2}{2g} dr = \frac{1}{B2g} \int_{r_1}^{r_2} \frac{c^2}{r^2} dr$$

$$\therefore \bar{V}^2 = \frac{1}{B} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{c}{r} \right)^2 dr = \frac{c^2}{B} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\therefore c = \bar{V} \sqrt{B \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}}$$

$$= \bar{V} \sqrt{\frac{(r_2 - r_1) \left(r_0 + \frac{B}{2} \right) \left(r_0 - \frac{B}{2} \right)}{(r_2 - r_1)}}$$

$$= \bar{V} \sqrt{r_0^2 - \frac{B^2}{4}} \quad (13)$$

一般の場合は

$$\begin{aligned} \bar{V}^2 &= \frac{1}{B} \int_{r_1}^{r_2} V^2 dr = \frac{1}{B} \int_{r_1}^{r_2} K^2 r^{2n} dr = \frac{K^2}{B} \int_{r_1}^{r_2} r^{2n} dr \\ &= \left(\frac{r^{2n+1}}{2n+1} \right)_{r_1}^{r_2} \frac{K^2}{B} \\ &= \left(\frac{r_2^{2n+1} - r_1^{2n+1}}{2n+1} \right) \frac{K^2}{B} \end{aligned}$$

であるから

$$K = \frac{\bar{V}}{\sqrt{\frac{r_2^{2n+1} - r_1^{2n+1}}{(r_2 - r_1)(2n+1)}}} \quad (14)$$

$n=1$ の場合は

$$K = \frac{\bar{V}}{\sqrt{r_0^2 + \frac{B^2}{12}}}$$

となる。 c および K は、 r_0 に比し B が小さなときは平均流速は水路中央に生ずるとして求めて十分である。

すなわち

$$\left. \begin{aligned} c &\doteq Vr_0 \\ K &\doteq \frac{V}{r_0^n} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

§3. 彎曲部の抵抗

抵抗係数は水深により異なるが、彎曲による水深の横断変化が大でないとして、平均水深 \bar{h} で表わすことにすると H. A. Einstein らによれば

$$cf = \left(\frac{r}{V} \frac{dV}{dr} + 1 \right) \frac{B}{r} = \xi \bar{h}^{-\frac{1}{4}} = \zeta \left(\frac{k_s}{\bar{h}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (16)$$

k_s は Nikradse の砂相当粗度

$$\log k_s = 3.69 \kappa - 0.435 - \frac{\kappa \bar{V}}{\sqrt{g \bar{h} S}} + \log \bar{h}$$

κ は Kármán 定数で pure water の場合 0.4

直線部の抵抗係数 f を、対数分布則による流速公式で表わすと

$$f = 8 \left(8.5 - \frac{1}{\kappa} + \frac{2.3}{\kappa} \log \frac{\bar{h}}{k_s} \right)^{-2} \quad (17)$$

である。実験によると cf は f より大で、 $\frac{r}{B}$ が重要な parameter の一つであることがわかっている。すなわち cf は $\frac{r}{B}$ が小さなほど大きく、 $\frac{r}{B}$ が大きなほど、 f に近づく。

§4. 彎曲部の水面形

実験によると彎曲度が 90° より小さいものについては、自由渦の仮定が成り立つようである。

この場合の水面形は

$$g \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V^2}{r} = \frac{c^2}{r^3} = \bar{V}^2 r_c^2 \frac{1}{r^3}$$

を積分して

$$h = -\frac{\bar{V}^2 r_c^2}{2g} \left(\frac{1}{r^2} \right) + c_1$$

を得る。ここで、平均水深 \bar{h} は r_c で生ずると仮定すれば

$$c_1 = \frac{\bar{V}^2}{2g} + \bar{h}$$

したがって、水面形は

$$h = \bar{h} + \frac{\bar{V}^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{r_c}{r} \right)^2 \right] \quad (18)$$

で計算できる。

しかし、 $\theta > 100^\circ$ では二次流が十分発達するから、外壁に沿う下向きの流れと内壁に沿う上向きの流れが半径方向の水面勾配を減小させる。この垂直流の流速を w とし、水深の基準を底面によると、

$$w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (19)$$

であるから、この式を積分して $z=h$ で $P=0$ $w=0$ なる条件を入れると

$$\frac{P}{\rho} = g(h-z) - \frac{1}{2} w^2$$

すなわち

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = g \frac{\partial h}{\partial r} - w \frac{\partial w}{\partial r} \quad (20)$$

一方、 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{V^2}{r}$ であるから、結局

$$g \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V^2}{r} + w \frac{\partial w}{\partial r} \quad (21)$$

を得る。

ここで、 w と $\frac{\partial w}{\partial r}$ は互いに逆の符号を持つもので、 w の境界層厚を β とし、二次流の水平流の流速を u 、その境界層厚を δ とすれば、 $\beta \cdot w = \delta \cdot u$ でなければならぬから、

$$w \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{\delta}{\beta} u \frac{\delta}{\beta^2} u = -\frac{\delta^3}{\beta^3} \frac{u^2}{\delta} = -\alpha \frac{u^2}{\delta} \quad (22)$$

さらに主流の半径方向の流速を U とすれば、

$$u \cdot \delta = U \cdot h$$

である故、(22) は

$$w \frac{\partial w}{\partial r} = -\alpha \frac{h^2}{\delta^3} U^2 = -\alpha \left(\frac{h}{\delta} \right)^3 \frac{U^2}{h} \quad (23)$$

となる。

また二次流が十分発達すれば、彎曲部の流れは等流に近くなる。したがって、

$$g \cdot S = \frac{U}{r} \frac{\partial (V \cdot r)}{\partial r}$$

すなわち

$$U = \frac{g \cdot S \cdot r}{\frac{\partial (V \cdot r)}{\partial r}} \quad (24)$$

であり、流速分布に近似式 $V = Kr^n$ を用いれば、

$$w \frac{\partial w}{\partial r} = -\alpha \frac{h^2}{\delta^3} \frac{1}{h} \left[\frac{g^2 \cdot S^2 \cdot r^2}{K^2 (n+1)^2 r^{2n}} \right] \quad (25)$$

となる。この式を平均値を用いて表わすと、

$$g \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V^2}{r} + w \frac{\partial w}{\partial r} = K^2 r^{2n-1} - \alpha \frac{g^2 \cdot S^2}{(n+1) K^2} \left(\frac{\bar{h}}{\delta} \right)^3 \frac{r^{2(1-n)}}{\bar{h}} \quad (26)$$

$r_c \gg \frac{B}{2}$ であれば、 \bar{h} は r_c に生ずるとしてよいから、

$$h = \bar{h} + \frac{K^2}{2gn} (r^{2n} - r_c^{2n}) - \frac{\alpha g}{(n+1)(3-2n) K^2 \bar{h}} \left(\frac{\bar{h}}{\delta} \right)^3 (r^{3-2n} - r_c^{3-2n}) \quad (27)$$

となり、広短形断面水路で、曲率半径の大きな彎曲部の等流状態における横断水面形を表わす。

§5. 水平流の運動量方程式

流速の横断分布が $V = Kr^n$ で表わされ、水平境界層内の流れが図-4 のようであるとすれば、

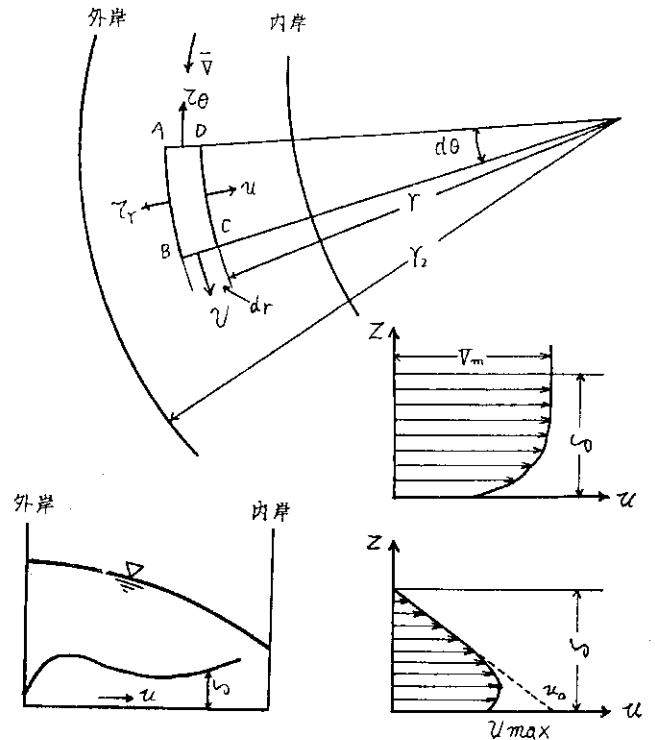


図-4

運動の式は

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (28)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u \cdot v}{r} = \theta - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (29)$$

であり、連続の式は

$$\frac{\partial(u \cdot r)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (30)$$

である。

(28) を 0 から δ まで積分すると左辺の各項は

$$\int_0^\delta u \frac{du}{\partial r} dz = \frac{1}{2} \int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial r} dz \quad (31)$$

$$\int_0^\delta \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} dz = \left[\frac{uv}{r} \right]_0^\delta - \int_0^\delta \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} dz \quad (32)$$

であるから、(35) の関係を入れると (32) は

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} dz &= \left[\frac{uv}{r} \right]_0^\delta + \int_0^\delta \frac{u}{r} \left(u + r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dz \\ &= \left[\frac{uv}{r} \right]_0^\delta + \int_0^\delta \frac{u^2}{r} dz + \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial r} dz \\ &= \left[\frac{uv}{r} \right]_0^\delta + \int_0^\delta \frac{u^2}{r} dz + \frac{1}{2} \int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial r} dz \end{aligned} \quad (33)$$

また、右辺の圧力の項は

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho gh)}{\partial r} \doteq g I_r - w \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{V^2}{r} \quad (34)$$

したがって、(28) の δ までの積分は、

$$\begin{aligned} \left[\frac{uv}{r} \right]_0^\delta + \int_0^\delta \frac{u^2}{r} dz + \int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial r} dz - \int_0^\delta \frac{v^2}{r} dz \\ = \frac{\tau_r}{\rho} - \int_0^\delta \frac{V^2}{r} dz \end{aligned} \quad (35)$$

ここで、 $z=\delta$ のとき $u=0$ 、 $z=0$ のとき $u=v=0$ である

から $\left[\frac{uv}{r} \right]_0^\delta = 0$ であり、

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{u^2}{r} dz + \int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial r} dz &= \frac{1}{r} \int_0^\delta \left(u^2 + r \frac{\partial u^2}{\partial r} \right) dz \\ &= \frac{1}{r} \int_0^\delta \frac{\partial(u^2 r)}{\partial r} dz \end{aligned}$$

である。この二つを (35) に入ると

$$\frac{d}{dr} \int_0^\delta u^2 r dz - \int_0^\delta v^2 dz = \frac{\tau_r}{\rho} r - V^2 \delta \quad (36)$$

(29) の左辺に (31) を入ると

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} &= u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial(ur)}{\partial r} + \frac{uv}{r} \\ &= u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} = \left\{ \frac{\partial(uv)}{\partial r} - v \frac{\partial v}{\partial r} \right\} - v \frac{\partial u}{\partial r} \\ &= \frac{\partial(uv)}{\partial r} - 2v \frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned} \quad (37)$$

右辺の各項に r^2 を乗じて変形する。

すなわち、第一項は

$$r^2 \frac{\partial(uv)}{\partial r} = \frac{\partial(uvr^2)}{\partial r} - 2uvr$$

第 2 項は

$$2vr^2 \frac{\partial u}{\partial r} = 2vr \frac{\partial(ur)}{\partial r} - 2uvr$$

したがって、右辺は

$$r^2 \left(\frac{\partial(uv)}{\partial r} - 2v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial(uvr^2)}{\partial r} - 2vr \frac{\partial(ur)}{\partial r} \quad (38)$$

また

$$\int_0^\delta \frac{\partial F(x)}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta F(x) dz - \left[F(x) \right]_0^\delta \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

であるから (38) を積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{\partial(uvr^2)}{\partial r} dz &= \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\delta (uvr^2) dz - \left[uv r^2 \right]_0^\delta \frac{\partial \delta}{\partial r} \\ &\doteq \frac{\partial}{\partial r} r^2 \int_0^\delta uv dz \end{aligned} \quad (39)$$

さらに平均値の定理を用いると

$$2r \int_0^\delta v \frac{\partial(ur)}{\partial r} dz = 2r v_\xi \int_0^\delta \frac{\partial(ur)}{\partial r} dz \quad (40)$$

ただし、 $0 < \xi < \delta$ で v_ξ は $z=\xi$ のときの流速である。

いま $v_\xi \doteq \frac{1}{2} V$ と仮定すると、(40) は

$$= V r \int_0^\delta \frac{\partial(ur)}{\partial r} dz \quad (41)$$

(38) (39) (41) から、(29) の 0 から δ までの積分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \int_0^\delta uv dz \right) - rV \frac{d}{dr} \left(r \int_0^\delta udz \right) \\ = \frac{\tau_\theta}{\rho} r^2 - g S \delta r^2 \end{aligned} \quad (42)$$

となり、(36) (42) は、境界層内の運動量方程式となる。

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_0^\delta u^2 r dz - \int_0^\delta v^2 dz &= \frac{\tau_r}{\rho} r - V^2 \delta \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \int_0^\delta uv dz \right) - rV \frac{d}{dr} \left(r \int_0^\delta udz \right) \\ &= \frac{\tau_\theta}{\rho} r^2 - g S \delta r^2 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

§ 6. 運動量方程式の解

境界層内の流速が Blasius の 1/7 乗法則に従うとすれば、

$$\left. \begin{aligned} v &= V \left(z/\delta \right)^{\frac{1}{7}}, \quad \tau_r = 0.0225 \rho \left(\frac{\nu}{\delta} \right)^{\frac{1}{4}} V^{\frac{3}{4}} u_0 \\ u &= u_0 \left(z/\delta \right)^{\frac{1}{7}} \left(1 - z/\delta \right), \quad \tau_\theta = 0.0225 \rho \left(\frac{\nu}{\delta} \right)^{\frac{1}{4}} V^{\frac{7}{4}} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ただし、 z ; 底面から測った境界層内の任意の高さ
 ν ; 動粘性係数

(35) を用いると (34) の各項は

$$\begin{aligned} \int_0^\delta u^2 r dz &= r \int_0^\delta u_0^2 \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{2}{7}} (1-z/\delta)^2 dz \\ &= \frac{343}{1656} r u_0^2 \delta = 0.2071 r u_0^2 \delta \\ \int_0^\delta v^2 dz &= \int_0^\delta V^2 \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{2}{7}} dz = \frac{7}{9} V^2 \delta = 0.7778 V^2 \delta \\ \int_0^\delta u v dz &= u_0 V \int_0^\delta \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{2}{7}} (1-z/\delta) dz \\ &= \frac{49}{144} u_0 V \delta = 0.3403 u_0 V \delta \\ \int_0^\delta u dz &= u_0 \int_0^\delta \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} (1-z/\delta) dz \\ &= \frac{49}{120} \delta u_0 = 0.4083 u_0 \delta \end{aligned}$$

したがって、(36) (42) は

$$\begin{aligned} 0.2071 \frac{d}{dr} (u_0^2 \delta r) + 0.2222 V^2 \delta \\ = 0.0225 \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} V^{\frac{3}{4}} r u_0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} 0.3403 \frac{d}{dr} (\delta u_0 V r^2) - 0.4083 V r \frac{d}{dr} (\delta u_0 r) \\ = 0.0225 \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} V^{\frac{7}{4}} r^2 - g S \delta r^2 \end{aligned} \quad (37)$$

となる。

ここで、主流部分の半径方向の流速を U とすれば、

$$U \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{UV}{r} = \left(\frac{\nu}{\rho}\right) (S - S_f) = g (S - S_f) \quad (38)$$

であるから、等流では

$$g S = \frac{U}{r} \frac{\partial (V r)}{\partial r} \quad (39)$$

また、 U は主流の半径方向の流速であるから、連続の条件から

$$U(h-\delta) = \int_0^\delta u dz = 0.4083 u_0 \delta$$

すなわち

$$U = \frac{0.4083 \delta}{h-\delta} u_0 \quad (40)$$

$\frac{\delta}{h-\delta}$ の平均値をもって代表させると

$$\frac{\delta}{h-\delta} = \text{const}$$

となるから

$$0.4083 \frac{\delta}{h-\delta} = A'$$

とおくと (39) は

$$g \cdot S = \frac{A' u_0}{r} \frac{\partial (V r)}{\partial r} \quad (41)$$

結局、運動量の式は

$$\begin{aligned} 0.2071 \frac{\partial}{\partial r} (u_0^2 \delta r) + 0.2222 V^2 \delta \\ = 0.0225 \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} V^{\frac{3}{4}} u_0 r \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} 0.3403 \frac{\partial}{\partial r} (\delta u_0 V r^2) - 0.4083 \frac{\partial}{\partial r} (\delta u_0 r) \\ = 0.0225 \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} V^{\frac{7}{4}} r^2 - A' u_0 \delta r \frac{\partial}{\partial r} (V \cdot r) \end{aligned} \quad (43)$$

となる。

ここで、 $V = K r^n$ を入れ、 $u_0 \delta = \phi$ 、 $\delta^{\frac{1}{4}} = d$ とおくと

(42) は

$$\begin{aligned} 0.2071 \left(\frac{\phi^2}{d^4} r\right)' + 0.2222 V^2 d^4 \\ = 0.0225 \nu^{\frac{1}{6}} d^{-1} V^{\frac{3}{4}} \frac{\phi}{d^4} \cdot r \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} 0.2071 (\phi^2 d + 2r \phi \phi' d - 4r \phi^2 d') + 0.2222 V^2 d^9 \\ = 0.0225 \nu^{\frac{1}{6}} V^{\frac{3}{4}} \phi r \end{aligned}$$

両辺を 0.2071 で割り、 $x = 1 - \frac{r}{b}$ (b は外壁の曲率半径) を入れると

$$\begin{aligned} \phi^2 d + 4(1-x)\phi^2 d' - 2(1-x)\phi \phi' d + 1.0730 K^2 b^{2n} (1-x)^{2n} d^9 \\ = 0.1086 \nu^{\frac{1}{6}} K^{\frac{3}{4}} b^{\frac{3}{4}n+1} \phi \left\{ 1 - \frac{3n+4}{4} x \right. \\ \left. + \frac{\left(\frac{3}{4}n+1\right) \frac{3}{4}n}{2!} x^2 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

同様にして、(43) からは

$$\begin{aligned} 0.3403 (\phi K r^{n+2})' - 0.4083 K r^{n+1} (\phi r)' \\ = 0.0225 \nu^{\frac{1}{6}} K^{\frac{7}{4}} d^{-1} r^{\frac{3}{4}n+2} - A' \phi r (K r^{n+1})' \\ A = \frac{A'}{0.3403} = 1.20 \frac{\delta}{h-\delta} \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} (n+0.8)\phi d + 0.2(1-x)\phi' d + A(n+1)\phi d \\ = 0.06612 \nu^{\frac{1}{6}} K^{\frac{3}{4}} b^{\frac{3}{4}n+1} \left\{ 1 - \frac{3n+4}{4} x \right. \\ \left. + \frac{\left(\frac{3}{4}n+1\right) \frac{3}{4}n}{2!} x^2 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

(44) (45) の解を

$$\left. \begin{aligned} \phi &= x^p (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) \\ d &= x^q (d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

とおき、(44) (45) において、べきが一致するという条件から

$$p = \frac{9}{10} \quad q = \frac{1}{10} \quad (47)$$

(45)に(46)(47)を入れて各項を計算すると,

$$\begin{aligned} \varnothing d &= c_0 d_0 x + (c_0 d_1 + c_1 d_0) x^2 \\ &+ (c_0 d_2 + c_1 d_1 + c_2 d_0) x^3 + \dots \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} (1-x)\varnothing' d &= \frac{9}{10} c_0 d_0 + \left(-\frac{9}{10} c_0 d_0 + \frac{9}{10} c_0 d_1 \right. \\ &+ \frac{19}{10} c_1 d_0 \left. \right) x + \left(-\frac{9}{10} c_0 d_1 + \frac{9}{10} c_0 d_2 \right. \\ &\left. - \frac{19}{10} c_1 d_0 + \frac{19}{10} c_1 d_1 + \frac{29}{10} c_2 d_0 \right) x^2 + \dots \end{aligned} \quad (49)$$

$$\varnothing^2 d = x^{\frac{9}{10}} \left\{ c_0^2 d_0 x + (2c_0 c_1 d_0 + c_0^2 d_1) x^2 + \dots \right\} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} (1-x)\varnothing^2 d' &= x^{\frac{9}{10}} \left\{ \frac{1}{10} c_0^2 d_0 + c_0 \left(-\frac{1}{10} c_0 d_0 + \frac{11}{10} c_0 d_1 \right. \right. \\ &+ \frac{2}{10} c_1 d_0 \left. \right) x + \left(-\frac{11}{10} c_0^2 d_1 + \frac{21}{10} c_0^2 d_2 - \frac{2}{10} c_0 c_1 d_0 \right. \\ &\left. + \frac{22}{10} c_0 c_1 d_1 + \frac{2}{10} c_0 c_2 d_0 + \frac{1}{10} c_1^2 d_0 \right) x^2 + \dots \left. \right\} \quad (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-x)\varnothing\varnothing' d &= x^{\frac{9}{10}} \left\{ \frac{9}{10} c_0^2 d_0 + c_0 \left(-\frac{1}{10} c_0 d_0 + \frac{9}{10} c_0 d_1 \right. \right. \\ &+ \frac{28}{10} c_1 d_0 \left. \right) x + \left(-\frac{9}{10} c_0^2 d_1 + \frac{9}{10} c_0^2 d_2 - \frac{28}{10} c_0 c_1 d_0 \right. \\ &\left. + \frac{28}{10} c_0 c_1 d_1 + \frac{38}{10} c_0 c_2 d_0 + \frac{19}{10} c_1^2 d_0 \right) x^2 + \dots \left. \right\} \quad (52) \end{aligned}$$

$$d^3 = d_0^3 + 9d_0^2 d_1 x + (9d_0^2 d_2 + 36d_0 d_1^2) x^2 + \dots \quad (53)$$

となる。(48)~(53)を用い、未定係数法によって、各係数を求めることができる。

i c_0, d_0 の決定

(44)より

$$\begin{aligned} 4 \times \frac{1}{10} c_0^2 d_0 - 2 \times \frac{9}{10} c_0^2 d_0 + 1.0730 K^2 b^{2n} d_0^3 \\ = 0.1086 \nu^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}} b^{\frac{3}{4}n+1} c_0 \end{aligned} \quad (54)$$

(45)より

$$0.20 \times \frac{9}{10} c_0 d_0 = 0.06612 \nu^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}} b^{\frac{3}{4}n+1} \quad (55)$$

(54)(55)を連立させて解くと

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= 0.8568 \left(\frac{\nu}{K} \right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{4-n}{2}} \\ c_0 &= 0.4287 \nu^{\frac{1}{8}} K^{\frac{4}{8}} b^{\frac{4}{8}(n+1)} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

ii c_1, d_1 の決定

(44)より

$$\begin{aligned} c_0^2 d_0 + 4c_0 \left(-\frac{1}{10} c_0 d_0 + \frac{11}{10} c_0 d_1 + \frac{2}{10} c_1 d_0 \right) \\ - 2c_0 \left(-\frac{9}{10} c_0 d_0 + \frac{9}{10} c_0 d_1 + \frac{28}{10} c_1 d_0 \right) \\ + 1.0730 K^2 b^{2n} \left(9d_0^2 d_1 - 2nd_0^3 \right) \\ = \left(c_1 - \frac{3n+4}{4} c_0 \right) \times 0.1086 \nu^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}} b^{\frac{3}{4}n+1} \end{aligned} \quad (57)$$

(45)より

$$\begin{aligned} (n+0.8)c_0 d_0 + 0.20 \left(-\frac{9}{10} c_0 d_0 + \frac{9}{10} c_0 d_1 + \frac{19}{10} c_1 d_0 \right) \\ + A(n+1)c_0 d_0 = 0.06612 \nu^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}} b^{\frac{3}{4}n+1} \left(-\frac{3n+4}{4} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

(57)(58)から

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.9937 \left\{ (0.7718 + A) \right. \\ &\left. + (1.1667 + A) n \right\} \nu^{\frac{1}{8}} K^{\frac{4}{8}} b^{\frac{4}{8}(n+1)} \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= -0.5668 \left\{ (1 + A) \right. \\ &\left. + (0.8985 + A) n \right\} \left(\frac{\nu}{K} \right)^{\frac{1}{20}} b^{\frac{4-n}{20}} \end{aligned} \quad (59)$$

iii c_2, d_2 の決定

$c_0 d_0 c_1 d_1$ は n および A がともに変数であっても求めることができたが、 x^2 以上の項の場合は、計算手順が非常に複雑になるので、いずれかを定数に仮定して解く。いま $n=1$ (H/B が小さい場合) であるとすれば、

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= (4.8530 + 12.1124A + 7.4292A^2) \nu^{\frac{1}{8}} K^{\frac{4}{8}} b^{\frac{8}{8}} \\ d_2 &= (0.8440 + 3.0342A + 2.2733A^2) \left(\frac{\nu}{K} \right)^{\frac{1}{20}} b^{\frac{8}{20}} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

となる。

結局、 \varnothing および d は

$$\begin{aligned} \varnothing &= x^{\frac{9}{10}} \left[0.4287 - 0.9937 \left\{ (0.7718 + A) \right. \right. \\ &\left. \left. + (1.1667 + A) n \right\} x + c_2 x^2 + \dots \right] \nu^{\frac{1}{8}} K^{\frac{4}{8}} b^{\frac{4}{8}(n+1)} \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} d &= x^{\frac{9}{10}} \left[0.8572 - 0.5668 \left\{ (1 + A) \right. \right. \\ &\left. \left. + (0.8985 + A) n \right\} x + d_2 x^2 + \dots \right] \left(\frac{\nu}{K} \right)^{\frac{1}{20}} b^{\frac{4-n}{20}} \end{aligned} \quad (62)$$

(61)の[]を $\varphi(x)$ 、(62)の[]を $D(x)$ で表わすと、 $\delta, u_0, \tau_r, \tau_\theta, u_*$ は次のようになる。

$$\delta = \left(\frac{\nu}{K} \right)^{\frac{1}{8}} b^{\frac{4-n}{8}} x^{\frac{2}{8}} D^4(x) \quad (63)$$

$$u_0 = K b^n x^{\frac{1}{2}} \varphi(x) D^4(x) \quad (64)$$

$$\tau_r = 0.0225 \nu^{\frac{1}{8}} b^{\frac{36n-4}{20}} K^{\frac{9}{8}} x^{\frac{2}{8}} (1-x)^{\frac{3}{4}} \varphi(x) D^4(x) \quad (65)$$

$$\tau_\theta = 0.0225 \nu^{\frac{1}{8}} b^{\frac{36n-4}{20}} K^{\frac{9}{8}} (1-x)^{\frac{7}{4}} x^{-\frac{1}{10}} D^4(x) \quad (66)$$

$$u_* = \sqrt{\frac{(\tau_r^2 + \tau_\theta^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho}} \dots (\text{河床のマサツ速度}) \quad (67)$$

§8. む す び

いままでの研究や今度の研究から、次のようなことがい
えよう。

i 流速の横断分布について

a. 彎曲度 θ が 90° より小さいければ、変数

$$\left(\frac{r}{V}\right) \frac{dV}{dr} = cf \left(\frac{r}{B}\right) - 1$$

は、 -1 に近く、すなわち

$$cf \cdot \left(\frac{r}{B}\right) \doteq 0$$

であって、自由渦の仮定が比較的よく成立する。

b. 彎曲度 θ が 100° を越え、二次流が十分発達すると彎
曲流は、等流状態に近くなり、川幅に比し、水深が小さな
ほど、変数 $\left(\frac{r}{V}\right) \frac{dV}{dr}$ は $+1$ に近づく。

ii マサツ抵抗係数

直線部における抵抗係数 f より、 cf は増大するが、浅い
流れほど大きく、 r/B の大なものほど小さい。

iii 彎曲部の横断水面形について

彎曲度 θ が 90° より小さい彎曲部は、従来のように自由
渦による計算でよいが、二次流の発達した部分では、二次
流の垂直流が、横断水面勾配を減少させるから、これを考
慮して、水面形を求めねばならない。(§4(27)式参照)

iv 境界層内の流れについて

a. 流れが自由渦と仮定できるものについては、岩垣博
士¹⁾によって明らかにされている。すなわち、境界層厚 δ
は外壁近くで急に発達し、あとは増加率は下がるが徐々に
増す。 u_0 は内壁へ向って次第に大きくなる。底面の摩擦速
度は外壁で非常に大きく、ややなれると一旦減少してか
ら、内壁に向って次第に増加する。

b. 二次流が十分発達した広く浅い流れについては、岸
博士²⁾、小川によって計算された。すなわち、 δ は、外壁

近くで急に発達し、川幅の $5\sim 10\%$ までは、比較的大きい
が、内壁に向って若干減少する。 u_0 は、内壁に向って次第
に増大する。摩擦速度は、外壁で、非常に大きく、川幅の
 $5\sim 10\%$ 位から内壁に向って次第に減少する。

いずれにしても彎曲部では、流れはヘリカルであって、
内壁に近くではその捩れの度合が大きく、底面における土
砂の移動を左右する摩擦速度は外壁では非常に大きく、か
つ砂礫の補給がないので、洗掘がはなはだしいことがわか
る。ただこの量を定量的に表わすことは困難であるが、石
原博士³⁾によると、洗掘、堆積の程度を表わす値 K を次式
で示した。

$$K = \varphi \rho \int_{r_1}^{r_2} \frac{\bar{V}^2 \bar{h}}{a(\alpha+2)r} dr \quad (69)$$

これによると、河床変動量は、 \bar{V}^2 と \bar{h} に比例して増減し、
流路半径が小さいほど大きく、河幅の大きいものほど大き
い。以上のようにして、河川彎曲部でのおおよその要素を
明らかにしうるから、河川工事の計画、設計、施工に対し
上述の一連の考察は十分意義があると思われる。

参 考 文 献

- 1) 石原藤次郎・本間仁編：応用水理学，上・中 I，丸善
- 2) H. A. Einstein and J. A. Harder：Velocity distri-
bution and the boundary layer at channel bends.
Trans. AGV. Vol. 35, No. 1 (1954)
- 3) 藤本武助：流体力学，養賢堂
- 4) F. Schultz-Grunow：Der Reihungswiderstand Rot-
terender Scheiben in Gehäusen. Z.A.M.M. Bd. 15
(1935)
- 5) Ven Te Chow: Open Channel Hydraulics. Mc Grow-
Hill Book Co. (1959)
- 6) 岸力・小川芳昭：開水路彎曲部の二次流に関する研究
土木学会，水理講演会講演集 (1962)

1) 京都大学工学部教授
2) 北海道大学工学部教授
3) 前出