

# 曲線橋の振動について

非藤昭夫\* 温泉重治\*\* 田岡充夫\*\*\*

## 1 まえがき

曲線ケタ橋の自由振動は、普通の直ゲタの場合のように曲げモーメントによる横振動のほか、ネジリ、および曲げネジリモーメントの作用によるネジリと曲げネジリ振動がある。

この各々の自由振動数を求めるためには、曲線ケタ橋をある中心角を持った1本の棒が両端単純支持された状態で、曲げ、ネジリ、曲げネジリの合成自由振動の基礎微分方程式により、その固有振動数を計算しなければならない。

また、この計算値をもとにして、野花南大橋と中愛別橋で現場実験によって求めた実験値を検討したものである。

## 2 曲ゲタの合成減衰自由振動

曲ゲタの曲げ、ネジリ、曲げネジリ合成自由振動の基礎微分方程式を、セン断力および回転慣性の影響を無視し、ケタは一定断面であるとして誘導する。

まず、円周方向の  $x$  軸に対する  $y$  軸方向のタワミの微分方程式は、 $z$  軸に関する断面二次モーメントを  $I_z$  と

し、分布する荷重を  $w$  とすれば、次式となる。(図1参照)

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} = EI_z \frac{d^4 y}{(Rd\phi)^4} = w \quad (1)$$

つぎに、ケタ中立軸に沿って分布する荷重  $w$  をセン断中心軸(ネジリ軸)に沿って分布する荷重  $w$  と、大きさ  $we$  なるトルクとに置きかえられ、変形は曲げと、セン断中心軸まわりのネジリおよび曲げネジリとの結合によると考えられる。

このネジリと曲げネジリは不均一トルク  $M_t$  とネジリ角  $\phi$  との間につぎの関係をもつ。

$$M_t = GC \frac{d\phi}{(Rd\phi)} - EC_{bd} \frac{d^3 \phi}{(Rd\phi)^3} \quad (2)$$

(2) 式で  $GC$  はネジリ剛性、 $EC_{bd}$  は曲げネジリ剛性を示し、 $R$  は断面中心までの半径を示す。したがってトルクを反時計まわりを正とすれば、(1)(2) 式より、

$$GC \frac{d^2 \phi}{(Rd\phi)^2} - EC_{bd} \frac{d^4 \phi}{(Rd\phi)^4} = -we \quad (3)$$

となる。

振動の場合には力の釣合いから、(1)(2) 式の左辺は平行移動による慣性力とネジリの慣性力と、粘性摩擦による減衰力とを考えなければならない。

したがって、合成減衰自由振動の微分方程式はつぎのようになる。

$$\frac{EI_z}{R^4} \left( \frac{\partial^4 y}{\partial \phi^4} \right) = -\frac{A\gamma}{g} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y + e\phi) - \frac{2KA\gamma}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (y + e\phi) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{GC}{R^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} \right) - \frac{EC_{bd}}{R^4} \left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial \phi^4} \right) \\ & = \frac{A\gamma e}{g} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y + e\phi) \\ & + \frac{I_p \gamma}{g} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} \right) + \frac{2KA\gamma e}{g} (y + e\phi) \end{aligned} \quad (5)$$

ここに  $\frac{A\gamma}{g}$ : ケタの単位長あたりの重量、 $K$ : 粘性摩擦係数、 $I_p$ : 断面の中心軸 ( $y$  軸) まわりの断面二次モーメントを示す。

そこで

$$y = y_0 \sin\left(\frac{n\pi\phi}{\theta}\right) e^{pt}, \quad \phi = \phi_0 \sin\left(\frac{n\pi\phi}{\theta}\right) e^{pt}$$

と(4)(5) 式に代入する。ここに  $p$ : 円振動数、

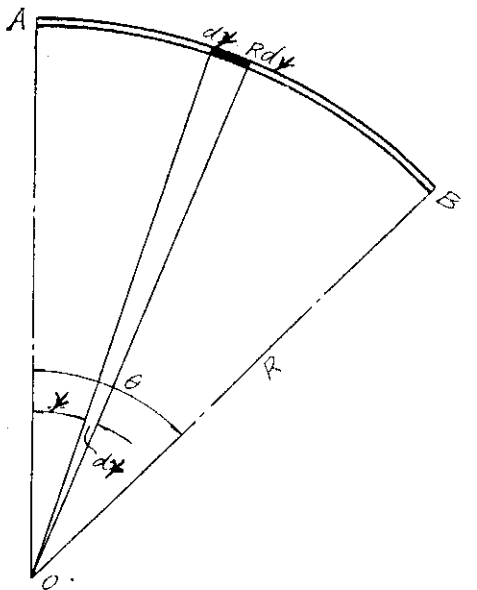


図-1

\* 構造研究室 主任研究員

\*\* 同室 技官

\*\*\* 同室 技術員

$\theta$ : 中心角,  $n$ : 自然数である。

したがって, (4) (5) 式は  $y_0, \varphi_0$  に関して整理すればつぎの一次連立方程式となる。

$$\left\{ \frac{A\gamma}{g} p^2 + \frac{2KA\gamma}{g} p + \frac{EI_z}{R^4} \left( \frac{n\pi}{\theta} \right)^4 \right\} y_0 + \left\{ \frac{A\gamma e}{g} p^2 + \frac{2KA\gamma e}{g} p \right\} \varphi_0 = 0 \quad (6)$$

$$\left\{ \frac{A\gamma e}{g} p^2 + \frac{2KA\gamma e}{g} p \right\} y_0 + \left\{ \left( \frac{A\gamma e^2}{g} + \frac{I_p \gamma}{g} \right) p^2 + \frac{2KA\gamma e^2}{g} p + \frac{GC}{R^2} \left( \frac{n\pi}{\theta} \right)^2 + \frac{EC_{bd}}{R^4} \left( \frac{n\pi}{\theta} \right)^4 \right\} \varphi_0 = 0 \quad (7)$$

(6) (7) 式の各係数をつぎのように書く。

$$\begin{aligned} \frac{A\gamma}{g} &= \lambda_{10}, & \lambda_{11} &= \frac{2KA\gamma}{g}, & \lambda_{12} &= \frac{EI_z}{R^4} \left( \frac{n\pi}{\theta} \right)^4, \\ \lambda_{13} &= \frac{A\gamma e}{g}, & \lambda_{14} &= \frac{2KA\gamma e}{g}, & \lambda_{20} &= \frac{A\gamma e}{g} = \lambda_{13}, \\ \lambda_{21} &= \frac{2KA\gamma e}{g} = \lambda_{14}, & \lambda_{22} &= \left( \frac{A\gamma e^2}{g} + \frac{I_p \gamma}{g} \right), \\ \lambda_{23} &= \frac{2KA\gamma e^2}{g}, \\ \lambda_{24} &= \left\{ \frac{GC}{R^2} \left( \frac{n\pi}{\theta} \right)^2 + \frac{EC_{bd}}{R^4} \left( \frac{n\pi}{\theta} \right)^4 \right\} \end{aligned}$$

したがって, 振動数方程式は (6) (7) 式が 0 でない  $y_0, \varphi_0$  の解を与えるには, (6) (7) 両式に関する行列式が 0 でなければならない。

$$\begin{vmatrix} (\lambda_{10}p^2 + \lambda_{11}p + \lambda_{12}) & (\lambda_{13}p^2 + \lambda_{14}p) \\ (\lambda_{13}p^2 + \lambda_{14}p) & (\lambda_{22}p^2 + \lambda_{23}p + \lambda_{24}) \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

(8) 式は

$$(\lambda_{10}p^2 + \lambda_{11}p + \lambda_{12})(\lambda_{22}p^2 + \lambda_{23}p + \lambda_{24}) - (\lambda_{13}p^2 + \lambda_{14}p)^2 = 0 \quad (8)'$$

そこで (8)' をつぎのように変形する。

$$\frac{1}{\lambda_{22}} (\lambda_{10}p^2 + \lambda_{11}p + \lambda_{12}) \left( p^2 + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{22}} p + \frac{\lambda_{24}}{\lambda_{22}} \right) - \frac{\lambda_{13}^2 p^4 + 2\lambda_{13}\lambda_{14}p^3 + \lambda_{14}^2 p^2}{\lambda_{22}} = 0 \quad (8)''$$

(8)'' 式について, 最後の項を考えると, 一般の橋梁では  $g(Ae^2 + I_p) \gg (Ae)^2 \gamma$  であるから低次の振動においては, 無視することができる。

したがって, 振動数方程式はつぎのように簡略できる。

$$(\lambda_{10}p^2 + \lambda_{11}p + \lambda_{12}) \left( p^2 + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{22}} p + \frac{\lambda_{24}}{\lambda_{22}} \right) = 0 \quad (9)$$

ゆえに, 振動数方程式はつぎの二式で表わされる。

$$\lambda_{10}p^2 + \lambda_{11}p + \lambda_{12} = 0 \quad (10)$$

$$p^2 + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{22}} p + \frac{\lambda_{24}}{\lambda_{22}} = 0 \quad (11)$$

(10) (11) 式は結局つぎのようになる。

$$p^2 + 2Kp + \omega_b^2 = 0 \quad (10)'$$

$$p^2 + 2\varepsilon Kp + \omega_i^2 = 0 \quad (11)'$$

上式で  $\omega_b^2, \omega_i^2, \varepsilon$  は各々つぎの値を示す。

$$\omega_b^2 = \frac{EI_z}{R^4} \left( \frac{n\pi}{\theta} \right)^4 \cdot \frac{g}{A\gamma}$$

$$\omega_i^2 = \frac{(n\pi)^2 (GCR^2 \theta^2 + n^2 \pi^2 EC_{bd}) g}{(R\theta)^4 \gamma (I_p + Ae^2)}$$

$$\varepsilon = \frac{Ae^2}{I_p + Ae^2}$$

そこで (10)' 式の解は曲げ振動数となり

$$p = -K \pm i(K^2 - \omega_b^2)$$

(11)' 式の解はネジリおよび曲げネジリ振動数となる。

$$p = -K\varepsilon \pm i(K^2\varepsilon^2 - \omega_i^2) \quad \text{ただし } i = \sqrt{-1}$$

となる振動形状  $y, \varphi$  の

$$y = y_0 \sin\left(\frac{n\pi\phi}{\theta}\right) e^{pt}, \quad \varphi = \varphi_0 \sin\left(\frac{n\pi\phi}{\theta}\right) e^{pt}$$

に各  $p$  を代入すればつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 \sin\left(\frac{n\pi\phi}{\theta}\right) e^{-Kt} \\ &\quad (A_b \sin \nu_b t + B_b \cos \nu_b t) \\ \varphi &= \varphi_0 \sin\left(\frac{n\pi\phi}{\theta}\right) e^{-K\varepsilon t} \\ &\quad (A_i \sin \nu_i t + B_i \cos \nu_i t) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(12) 式で  $\nu_b = \sqrt{\omega_b^2 - K^2}, \nu_i = \sqrt{\omega_i^2 - K^2\varepsilon^2}, A_b, B_b, A_i, B_i$  は各々振動時, 初相により定まる定数である。

### 3 数値計算例

#### 3-1 野花南大橋

一級国道 38 号線の本橋は, 半径(橋軸中心) 249.75 m の鋼鉄 2 主ゲタ (図-2) の非対称断面であるが, 計算には対称断面に換算して行なうものとする。

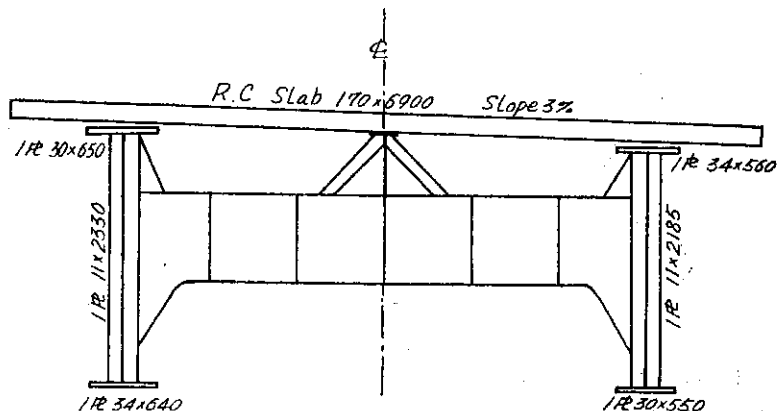


図-2

まず曲げによる振動数は

$$\omega_b = \frac{n^2 \pi}{2(R\theta)^2} \sqrt{\frac{EI_x g}{A\gamma}} \text{ C/S} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

で求められる。

なお本橋は鋼鉄ゲタ橋であるが、振動時は鋼ゲタとコンクリート床版とに合成作用があるものとする。

図-2の断面値は、 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $(R\theta)^2=(24975 \times 0.13166)^2 \text{ cm}^2$ ,  $A\gamma=49.60 \text{ kg/cm}$ ,  $I_x=25,049,782 \text{ cm}^4$  である。

これらの数値を(13)式に代入し、第一次振動数を求めると  $\omega_b=4.63 \text{ C/S}$  となる。

つぎに、ネジリと曲げネジリによる振動数は、

$$\omega_t = \frac{n}{2(R\theta)^2} \sqrt{\frac{(GCR^2\theta^2 + n^2\pi^2 EC_{bd})g}{\gamma(I_p + Ae^2)}} \text{ C/S} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

で求められる。

いま、 $GC$ ,  $EC_{bd}$  を計算するのに、つぎのように仮定をおく。

2本の等しい断面のIゲタが十分剛な横ゲタで連結されているとし、その場合の曲げネジリ係数  $C_{bd}$  は近似的に  $C_{bd} = \frac{b^2 I_x}{4}$  で与えられる。ここに  $b$  はI主ゲタ間隔である。

また、この橋梁断面は上面は床版、下面は横綾構で閉

じられた準箱ゲタであるとする。

これは設計ではスラブ止めがついていないが、載荷実験によれば、ある程度のジュベル効果があるものと考えられるからである。

横綾構を箱ゲタのボトムプレートに換算するために、セン断変形に抵抗する板と考えると、板厚  $t$  は近似的に  $t = \frac{EF \sin^2 \alpha \cos \alpha}{Gh}$  で計算される。

ここに、 $F$ : 横綾構の断面積  $27.9 \text{ cm}^2 \times 2$ ,  $\alpha$ : 横綾構と主ゲタとのなす角の平均  $30^\circ 18'$ ,  $G$ : 鋼のセン断弾性係数  $8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $b$ : 主ゲタ間隔  $480 \text{ cm}$  とすれば  $t = 0.067 \text{ cm}$  となる。

よってネジリ剛性は  $GC = \frac{4G(bh)^2}{\phi \frac{du}{t}}$  で与えられる。

ここに  $h$  は主ゲタの下フランジの厚さの中心から上面床版の厚さの中心までの距離、 $du$  はこの閉断面に沿って測り、 $\phi$  は断面を一周して積分することを表わす。

したがって、 $GC$  は  $4.28 \times 10^{12} \text{ kg. cm}^2$  となる。

また、 $I_p$  は  $1.90 \times 10^8 \text{ cm}^4$ ,  $e$  は  $65.2 \text{ cm}$  であるので結局  $\omega_t = 10.27 \text{ C/S}$  となる。

### 3-2 中愛別橋

一級国道39号線の本橋は、半径(橋軸中心)  $400.00 \text{ m}$ , 中心角  $6^\circ 19' 52''$  の単純鋼箱ゲタ橋である。(図-3参照)

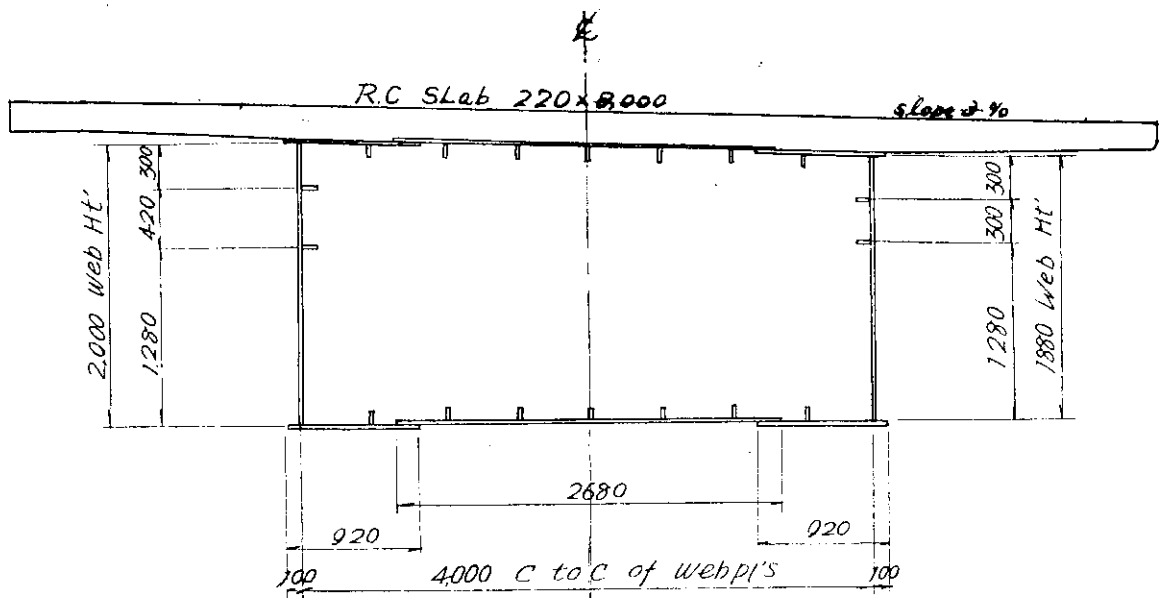


図-3

計算断面の図-3により諸値を求めるのであるが3-1の場合と同じく鋼箱ゲタとコンクリート床版とに合成作用があるものとする、 $I_x=27,334,000 \text{ cm}^4$ 、 $(R\theta)^2=(400 \times 0.11049)^2$ 、 $A\gamma=57.58 \text{ kg/cm}$ である。なお地覆の断面は無視した。

したがって曲げ振動数は $\omega_b=2.52 \text{ C/S}$

つぎに図の断面よりネジリ剛性、曲げネジリ抵抗を算出すると、 $GC$ は $19.44 \times 10^8 \text{ kg. cm}^2$ 、 $C_{bd}=1.093 \times 10^{12} \text{ cm}^6$  また  $I_p+A\gamma=27,334,000 \text{ cm}^4$  となるのでネジリおよび曲げネジリの第一次振動数は  $13.96 \text{ C/S}$  となる。

#### 4 野花南大橋、中愛別橋、現場実験

##### 4-1 野花南大橋

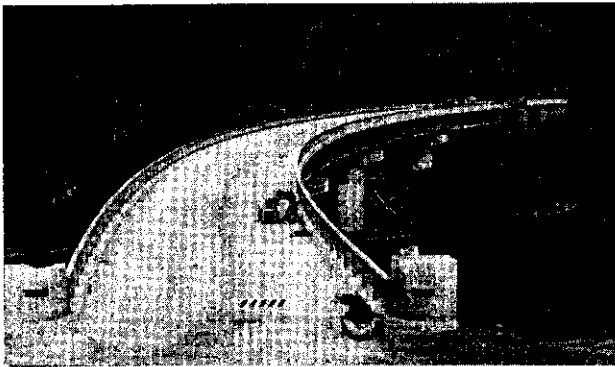


写真-1 野花南大橋 (左岸付きより見る)

振動実験の結果のレスポンスカーブは図-4に示すように共振点が2個測定されたが、共振点のうち4.41 C/Sのほうは曲げによるものと考えられ、また6.05 C/Sのほうはネジリおよび曲げネジリによるものと思われる。

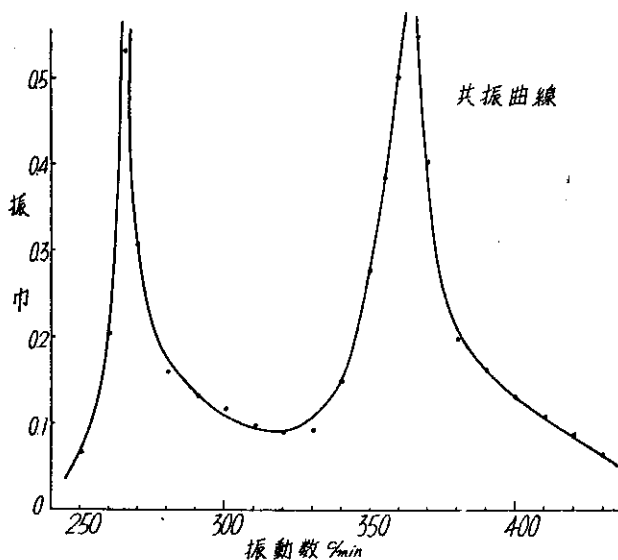


図-4

なお、後者は計算による値と大分かけはなれているのは、本橋は合成ゲタとして設計されていないので、づれ

止めによるネジリおよび曲げネジリ剛性が十分でなく、また床版と構綾構で閉合された断面として振動数の計算したところに多少問題があると思われる。

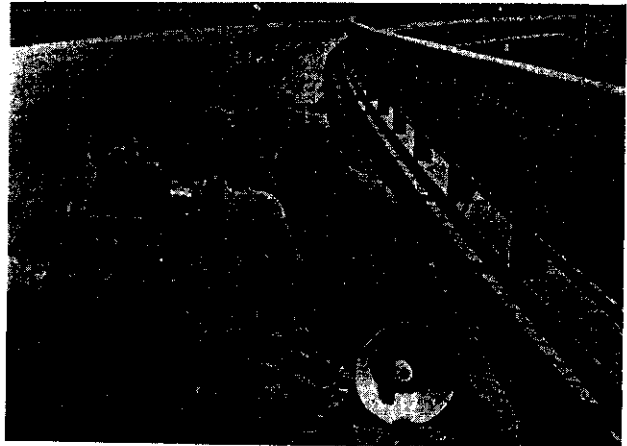


写真-2 野花南大橋現場実験状況

##### 4-2 中愛別橋



写真-3 中愛別橋 (下面より見る)

本橋の振動時の測定には右岸付きの径間について、径間中央で橋軸に直角に加速度計を5個として行なった。

その結果のレスポンスカーブは図-5に示すように曲げによると思われる共振点は2.60 C/S、ネジリおよび曲げネジリによるものと思われるのは13.40 C/Sとなる。

以上二橋についての諸値および実測値を表-1, 2にまとめる。

#### 5 あとがき

単純曲線ゲタ橋の振動計算に両端単純支持の1本の曲がり棒の曲げとネジリおよび曲げネジリ合成減衰自由振動の微分方程式を適用し、その固有振動数を求めた。

その結果、振動数方程式は、円振動数 $\omega$ に関する四次方程式となる。その根として $\omega$ が4個存在することになるが、実際の橋梁についてそのうち微小なる項を無視すると、結局、2個の二次方程式が得られ、これより各々1個ずつ、2個の固有振動数が互いに独立に求めら

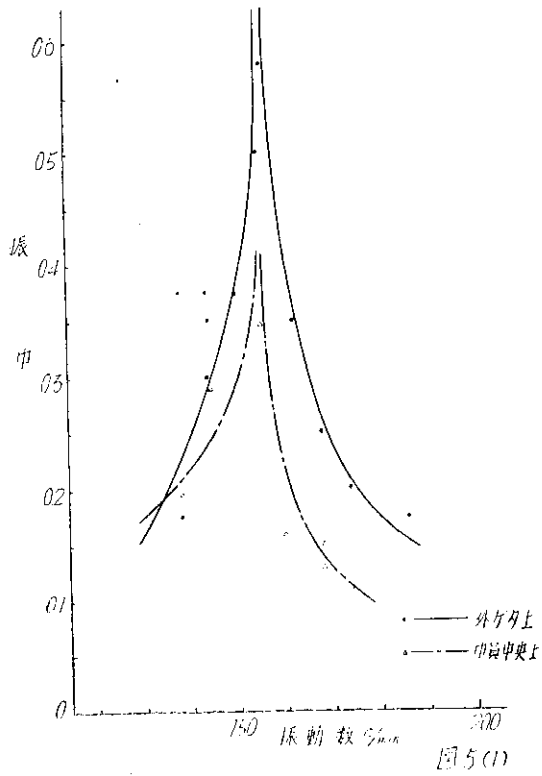


図-5 (1)

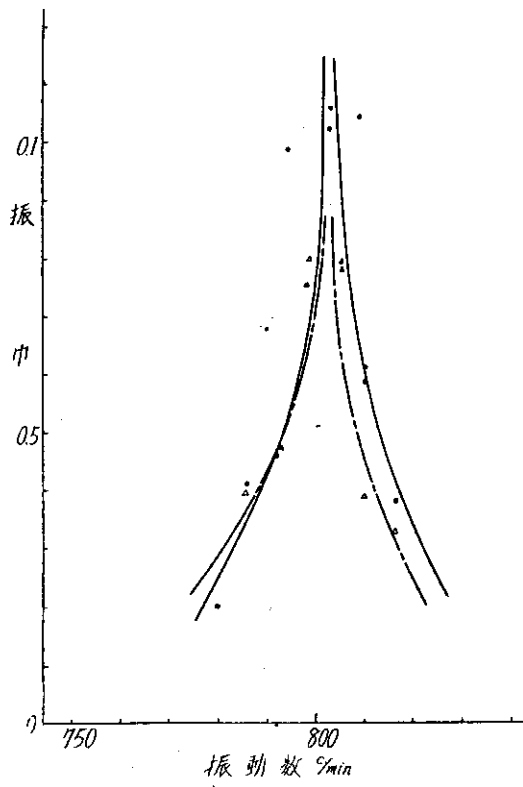


図-5 (2)

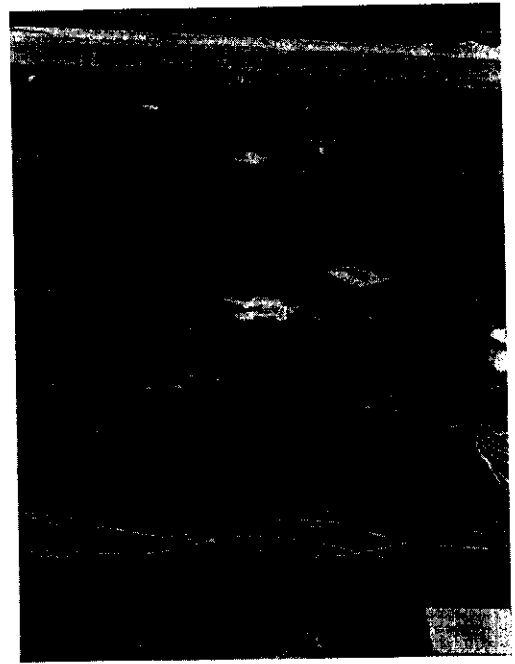


写真-4 中愛別橋現場実験—加速度計—

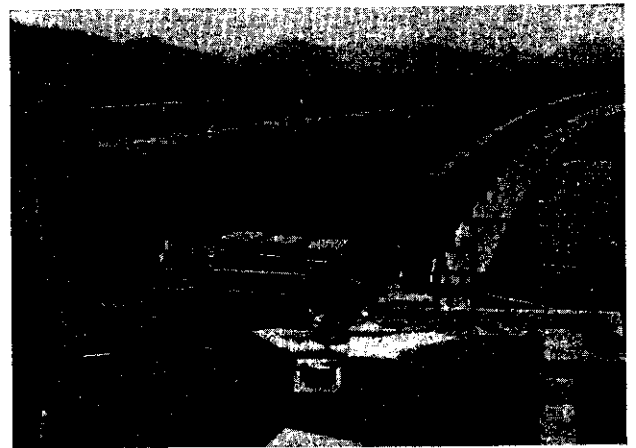


写真-5 中愛別橋現場実験—測定状況—

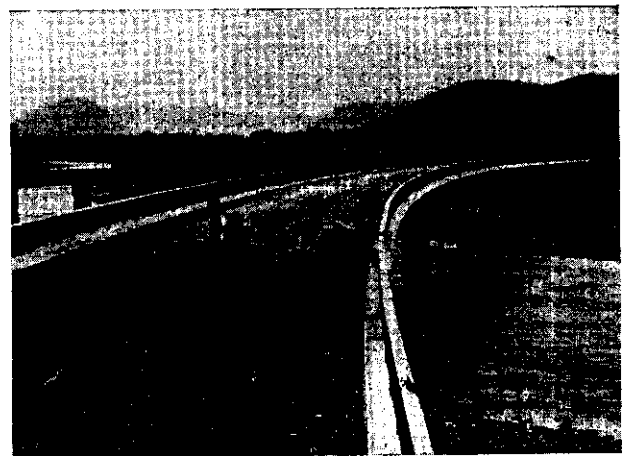


写真-6 中愛別橋現場実験—起振機—

表-1 断面 値

	R (m)	$\theta$	$A_T$ (kg/cm)	$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	GC (kg. cm <sup>2</sup> )	$EC_{bd}$ (kg. cm <sup>4</sup> )
野 花 南 大 橋	249.75	7°32'38"	49.60	25.049 × 10 <sup>6</sup>	1.90 × 10 <sup>8</sup>	4.28 × 10 <sup>12</sup>	30.29 × 10 <sup>17</sup>
中 愛 別 橋	400.00	6°19'52"	57.58	27.334 × 10 <sup>6</sup>	1.69 × 10 <sup>8</sup>	19.44 × 10 <sup>12</sup>	22.95 × 10 <sup>17</sup>

表-2 各振動数および減衰係数

橋 名	振 動	振 動 数 (C/S)			減 衰 係 数 (C/S)	
		1 次	2 次	3 次		
野 花 南 大 橋	曲 げ	(4.63)	4.41	(18.52)	—	0.480
	ネジリおよび曲げネジリ	(10.27)	6.05	(30.06)	—	
中 愛 別 橋	曲 げ	(2.60)	2.52	(10.40)	—	0.466
	ネジリおよび曲げネジリ	(13.96)	13.40	(30.17)	—	

( ) 理論値

れた。

この固有振動数は、それぞれ曲げによるものとネジリおよび曲げネジリによるものである。

また、振動形状として一般の橋梁では、 $\epsilon$ の値が非常に小さいと考えられるので、ネジリおよび曲げネジリによる振動は減衰がおそくなる。

ただし、ここでの減衰係数は曲げ、ネジリおよび曲げネジリ振動とも同じであると仮定した。また、この理論計算を確認するために、野花南大橋と中愛別橋について現場実験を行なった。

その結果は表-2 に示すとおり各振動数とも第一次振動数のみを測定したが、野花南大橋についてはネジリおよび曲げネジリによるものと思われる共振点が理論値とに相当のひらきがあるのは、鋼板橋を下横梁をセン断力のみ抵抗する1枚の板に換算し、準箱ゲタ橋として計算したので、ネジリ剛性および曲げネジリ剛性の値

が過大な値となったものと考えられる。

中愛別橋については、両方の振動数とも理論値に近い。これは本橋が本格的な鋼箱ゲタ橋であるため、十分なネジリおよび曲げネジリ剛性があるためであって本計算の適用は妥当であると思われる。

なお実験時における起振力が小さいので、鋼板ゲタ、鋼箱ゲタ橋ともコンクリート床版とに合成作用が存在するものとして振動計算してもよいことがわかった。

#### 参考文献

- 1) S. TIMOSHENKO : Vibration Problems in Engineering, 3. Edition 1955.
- 2) F. WANSLEBEN : Die Berechnung drehfester gekrümmter Stahlbrücken, Der Stahlbau 1952, Heft 4.
- 3) 平井 敦, 倉西 茂 : 曲線橋の理論について