

種々の流出解析法の関係について (第一報)

(流出関数の研究)

相田 俊郎*

目次

1. まえがき
2. 一般流出関数について
3. 一般流出関数のピークの変化
4. 特殊流出関数について
5. 特殊流出関数のピークの変化
6. 貯溜係数 α の性質について
7. 本考察の応用
8. あとがき

附 アナコンのブロック例と計算例

1. ま え が き

本報告は、一般流出関数を多次おくれの伝達関数の逆ラプラス変換として定義すると、流出に及ぼす要素すなわち、自由度がどのように流出波形に影響するかを考察することができること、および一般流出関数の係数が各次共通であるものを特殊流出関数と定義すると一般流出関数に比して自由度は減ずるが貯溜法⁽¹⁾、あるいは貯溜関数法⁽²⁾の基本式、2次⁽³⁾および n 次⁽⁴⁾の流出関数が求められ、一方これらの複合でタンクモデル⁽⁵⁾の1つが求められることを示したものである。

このことによって、実際流出解析にあたって自由度を

$$1 \text{ 次では } \frac{Q(t)}{I(t)} = \mathcal{L}^{-1} \frac{Q(s)}{I(s)} = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\alpha}{p+\alpha} \right) = \alpha e^{-\alpha t}$$

$$2 \text{ 次では } \frac{Q(t)}{I(t)} = \mathcal{L}^{-1} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)} = \alpha_1 \alpha_2 \left\{ \frac{e^{-\alpha_1 t}}{(\alpha_2 - \alpha_1)} + \frac{e^{-\alpha_2 t}}{(\alpha_1 - \alpha_2)} \right\}$$

$$3 \text{ 次では } \frac{Q(t)}{I(t)} = \mathcal{L}^{-1} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)(p+\alpha_3)} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \left\{ \frac{e^{-\alpha_1 t}}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)} + \frac{e^{-\alpha_2 t}}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)} + \frac{e^{-\alpha_3 t}}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)} \right\}$$

$$n \text{ 次では } \frac{Q(t)}{I(t)} = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2) \cdots (p+\alpha_n)} \right) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{B'(\alpha_k)} e^{-\alpha_k t} \right\} \cdots \cdots (1)$$

ただし $\left\{ \begin{array}{l} Q(s), I(s); \text{ 流出 } Q(t), \text{ 流入 } I(t) \text{ のラプラス変換による像関数} \\ p; \text{ ラプラス変換第 1 種パラメータ} \\ B(p); (p+\alpha_1)(p+\alpha_2) \cdots (p+\alpha_k) \cdots (p+\alpha_n) \\ B'(\alpha_k); \left[\frac{dB(p)}{dp} \right]_{p \rightarrow -\alpha_k} \end{array} \right.$

どのようにとり入れて行くべきかということが明らかになり、また実際計算にあたって多次おくれの伝達関数の単位波応答が線型性と重畳性をもつので、いわゆるユニットグラフとして用いられることから、今までわれわれがユニットグラフによる計算法と貯溜法による計算法とに手法的に異ならしめていたものが流出関数によるときは両者ともまったく同一の手法で組織的、系統的に計算され得ることも示した。

参 考 文 献 (1)

- * (1) 昭和26年東北地建；藤樫博暁氏「河川流出に関する一研究」
- * (2) 昭和37年土研；木村俊晃氏「貯溜関数法」
- * (3) 昭和27年土研；佐藤清一、吉川秀夫、木村俊晃氏「降雨から流出量を推定する一方法」
- * (4) 昭和33年学会論文集57号；石原藤次郎、高瀬信忠氏「流出関数による由良川洪水の解析」および
- * (3)
- * (5) 「昭和29・30年度・文部省科学試験研究費補助金による研究報告」；菅原正巳、丸山文行氏「雨量から流量を予知する方法について」

2. 一般流出関数について

一般流出関数を次のように定義する。

* 石狩川開発建設部工務第1課長

単位ステップ関数に対する応答は一般に（ヘビサイド展開定理を用いて）

$$n \text{ 次で } \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)\cdots(p+\alpha_n)} = u(t) \left\{ 1 - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}{\alpha_k B'(\alpha_k)} e^{-\alpha_k t} \right\}$$

であるから単位波（矩形・単位時間 τ_0 ）応答は

$$Q(t) = u(t) \left\{ 1 - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}{\alpha_k B'(\alpha_k)} e^{-\alpha_k t} \right\} - u(t-\tau_0) \left\{ 1 - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}{\alpha_k B'(\alpha_k)} e^{-\alpha_k(t-\tau_0)} \right\}$$

となる。

この式が流出関数法によるときのユニットグラフである。

3. 一般流出関数のピークの変化について

Q_k を K 次の流出とすると

$$\frac{Q_k(s)}{I(s)} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_k}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)(p+\alpha_3)\cdots(p+\alpha_k)}$$

$$\frac{Q_{k+1}(s)}{I(s)} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_k \alpha_{k+1}}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)\cdots(p+\alpha_k)(p+\alpha_{k+1})}$$

であるから

$$\frac{Q_{k+1}(s)}{Q_k(s)} = \frac{\alpha_{k+1}}{p+\alpha_{k+1}}$$

となり、 Q_{k+1} と Q_k との間には次の一次おくれ関係がなりたつ

$$\text{すなわち } \frac{\alpha Q_{k+1}(t)}{at} = \alpha_{k+1}(Q_k(t) - Q_{k+1}(t)) \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\therefore Q_{k+1}(t) = Q_k(t) \alpha_{k+1} e^{-\alpha_{k+1} t}$$

ピーク時刻においては $t = t_{pk+1}$ として

$$\frac{\alpha Q_{k+1}(t)}{at} = 0 \quad \text{であるから}$$

$$Q_{k+1}(t) = \alpha_{k+1} Q_k(t_{pk+1}) \left\{ 1 - \alpha_{k+1} e^{-\alpha_{k+1} t_{pk+1}} \right\} \quad \text{において}$$

$\alpha_{k+1} e^{-\alpha_{k+1} t_{pk+1}} = 1$ となる（ただし $Q_k(t_{pk+1}) \neq 0$ の時）

$$\text{すなわち } t_{pk+1} = \frac{\ln \alpha_{k+1}}{\alpha_{k+1}} \quad \dots\dots\dots(3)$$

(2)式から $k+1$ 次の流出ピークは k 次流出波と交わる所におきその値は $Q_{k+1 \text{ peak}} = Q_k(t_{pk+1})$ であり

(3)式から $k+1$ 次の流出ピーク時刻が α_{k+1} によって決まるということがわかる。

これらは実際流出解析において直接流出と基底流出との分離のように次数の異なる流出解析に役立つ結果である。

4. 特殊流出関数について

特殊流出関数を一般流出関数の流出係数が各次共通の値であるときの流出関数であると定義する。すなわち

1次では

$$\frac{Q(t)}{I(t)} = \mathcal{L}^{-1} \frac{Q(s)}{I(s)} = \mathcal{L}^{-1} \frac{\alpha}{p+\alpha} \quad \text{微分方程式で表現すると } \frac{\alpha Q(t)}{at} + \alpha Q(t) = \alpha I(t) \quad \text{となり、貯溜法*1または貯溜}$$

関数法*2の基本式となる。

さらに進めて $\frac{Q(t)}{I(t)} = \alpha e^{-at} = A(t)$ を1次の（特殊）流出関数とする

このインデシアル応答は単位ステップ関数を $u(t)$ とすると

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p} \frac{\alpha}{p+\alpha} = u(t) \left\{ 1 - e^{-at} \right\}$$

であるから矩形単位波（単位時間 τ_0 ）応答すなわちユニットグラフは

$$U(t) = u(t) - u(t-\tau_0), \quad \mathcal{L}U(t) = U(s) = \frac{1-p\tau_0}{p} \quad \text{であるから}$$

$$Q(s) = A(s)U(s) = \frac{\alpha(1-p\tau_0)}{p(p+\alpha)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\alpha} - \frac{e^{-p\tau_0}}{p} + \frac{e^{-p\tau_0}}{p+\alpha}$$

に変移定理すなわち $\mathcal{L} f(t) e^{at} = F(p-a)$ を利用すると

$Q(t) = \mathcal{L}^{-1} Q(s) = u(t)(1 - e^{-at}) - u(t - \tau_0)(1 - e^{-a(t - \tau_0)})$ を得る

すなわち $t < \tau_0$ で $Q(t) = 1 - e^{-at}$

$t > \tau_0$ で $Q(t) = e^{-a(t - \tau_0)} - e^{-at}$

これは参考文献(1)所論の矩形降雨応答とまったく同じである。

2次では

$$\frac{Q(t)}{I(t)} = \mathcal{L}^{-1} \frac{\alpha^2}{(p + \alpha)^2} \text{ 微分方程式で表現すると } \frac{\alpha^2 Q(t)}{at^2} + 2\alpha \frac{\alpha Q(t)}{at} + \alpha^2 Q(t) = \alpha^2 I(t)$$

さらに進めて $= \alpha^2 t e^{-at}$ となり、参考文献(3)で詳論されている2次の流出関数そのものとなる。

このインデンシャル応答は

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p} \frac{\alpha^2}{(p + \alpha)^2} = u(t) \{ 1 - ate^{-at} - e^{-at} \}$$

$$Q(t) = u(t) \{ 1 - ate^{-at} - e^{-at} \} - u(t - \tau_0) \{ 1 - \alpha(t - \tau_0)e^{-a(t - \tau_0)} - e^{-a(t - \tau_0)} \}$$

すなわち、 $t < \tau_0$ で $Q(t) = 1 - e^{-at} \{ \alpha t + 1 \}$

$$t > \tau_0 \text{ で } Q(t) = e^{-a(t - \tau_0)} \{ \alpha(t - \tau_0) + 1 \} - e^{-at} \{ \alpha t + 1 \}$$

3次でも同様に

$$\frac{Q(t)}{I(t)} = \mathcal{L}^{-1} \frac{\alpha^3}{(p + \alpha)^3} \text{ すなわち } \frac{\alpha^3 Q}{\alpha t^3} + 3\alpha \frac{\alpha^2 Q}{\alpha t^2} + 3\alpha^2 \frac{\alpha Q}{\alpha t} + \alpha^3 Q = \alpha^3 I$$

$$= \frac{\alpha^3 t^2 e^{-at}}{2} \text{ なる3次の流出関数となる。}$$

このインデンシャル応答は

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p} \frac{\alpha^3}{(p + \alpha)^3} = u(t) \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 t^2}{2} e^{-at} - \alpha t e^{-at} - e^{-at} \right\}$$

ユニットグラフは

$$Q(t) = u(t) \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \alpha^2 t^2 + \alpha t + 1 \right) e^{-at} \right\} - u(t - \tau_0) \left[1 - \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2 (t - \tau_0)^2 + \alpha(t - \tau_0) + 1 \right\} \times e^{-a(t - \tau_0)} \right]$$

一般に n 次では

$$\frac{Q(t)}{I(t)} = \mathcal{L}^{-1} \frac{\alpha^n}{(p + \alpha)^n} \text{ すなわち } \left(\frac{\alpha}{at} + \alpha \right)^n Q(t) = \alpha^n I(t)$$

$$\frac{Q(t)}{I(t)} = \alpha^n t^{n-1} e^{-at} / (n-1)! \text{ なる } n \text{ 次の流出関数となる。}^{*(4)}$$

これは参考文献(3)の一般形また同(4)の流出関数である。インデンシャル応答は

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p} \frac{\alpha^n}{(p + \alpha)^n} = u(t) \left[1 - e^{-at} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha t)^{n-i}}{(n-i)!} \right\} \right]$$

ユニットグラフは

$$Q(t) = u(t) \left[1 - e^{-at} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha t)^{n-i}}{(n-i)!} \right\} \right] - u(t - \tau_0) \left[1 - e^{-a(t - \tau_0)} \sum_{i=1}^n \frac{\{\alpha(t - \tau_0)\}^{n-i}}{(n-i)!} \right]$$

ここにユニットグラフとして算出した $Q(t)$ が重畳性をもつことは次のようにして判明する。すなわち流出関数を $A(t)$ で表わし、流入(降雨)関数を $I(t) = r_0 u(t) + r_1 u(t-1) + r_2 u(t-2) + \dots + r_k u(t-k)$ とステップ関数で表わすと $\mathcal{L} I(t) = I(s) = \frac{1}{p} (r_0 e^{-p \cdot 0} + r_1 e^{-p \cdot 1} + r_2 e^{-p \cdot 2} + \dots + r_k e^{-p \cdot k})$

$$\mathcal{L} A(t) = A(s) = \frac{\alpha^n}{(p + \alpha)^n} \text{ であるから}$$

$$r \bar{Q}(t) = A(t) I(t) = \mathcal{L}^{-1} I(s) A(s) = u(t) r_0 A(t) + u(t-1) r_1 A(t-1) + u(t-2) r_2$$

$$\times A(t-2) + \dots + u(t-k) r_k A(t-k)$$

$u(t-i)$ の性質から $r \bar{Q}(t) = \sum_{i=0}^t r_i A(t-i)$ となり Convolution のシグマ表現にはかならないので重畳性を示している。

さらに線型性については、定義からも判明するので $A(t)$ の単位矩形波応答はユニットグラフとして認識されるものと同じものであるといえることになる。

そして2・3・4を通じて流出関数による場合、計算結果はユニットグラフによる手法と貯溜法による手法とはまったく同じであるといえる。

複合の例については

$$\frac{Q(s)}{I(s)} = \frac{\alpha^{n+1}}{(p+\alpha)^{n+1}N_N} + \frac{\alpha^n}{(p+\alpha)^n N_{n-1}} + \dots + \frac{\alpha^2}{(p+\alpha)^2 N_1} + \frac{\alpha}{(p+\alpha)N_0}$$

ただし $\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{N_i}\right) = 1$ としてまったく同様に考察できる。これはタンク・モデルの⁽⁵⁾1つである。

5. (特殊) 流出関数のピークの変化について

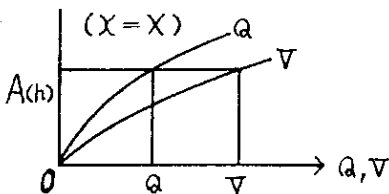
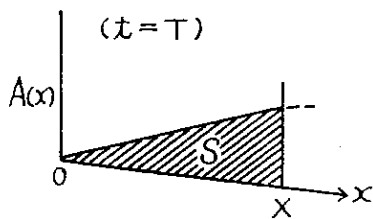
特殊流出関数を次数の順にならべて2~3の考察を試みると次のようになる。

次数	流出関数 $A(t)$	$\frac{\alpha A(t)}{at} = A'(t)$	$A'(t)=0$ の時刻 t_p	peak 値
1	αe^{-at}	$e^{-at}(0 \cdot \alpha - \alpha^2 t^0)$	$t \geq 0$ だから $t_p = 0$	αe^0
2	$\alpha^2 t e^{-at}$	$e^{-at}(1 \cdot \alpha^2 - \alpha^3 t^1)$	$= \frac{1}{\alpha}$	αe^{-1}
3	$\alpha^3 t^2 e^{-at} / 2$	$e^{-at}(2 \cdot \alpha^3 t - \alpha^4 t^2) / 2$	$\frac{2}{\alpha}$	$2^2 \alpha e^{-1} / 2$
4	$\alpha^4 t^3 e^{-at} / 6$	$e^{-at}(3 \cdot \alpha^4 t^2 - \alpha^5 t^3) / 6$	$\frac{3}{\alpha}$	$3^3 \alpha e^{-3} / 6$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\alpha^n t^{n-1} e^{-at} / (n-1)!$	$e^{-at} \left\{ (n-1) \alpha^n t^{n-2} - \alpha^{n+1} t^{n-1} \right\} / (n-1)!$	$\frac{n-1}{\alpha}$	$\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \alpha / (n-1)!$

これは参考文献(4)に述べられていることと同様であり、この他変曲点 $\frac{1}{2}$ 点 $\frac{1}{3}$ 点についても考察されるがここでは省略される。

6. 貯溜係数 α の性質について

流出問題も流水を取り扱うものであるから運動式と連続式とを連立させて解くのが原則である。特性曲線法による出水解析が開発されて合理的に解析されるようになってきているが、現状ではまだこの地点にでも実用化するには



検討の余地があって、ユニットグラフ法や貯溜法が実用の大部分を占めている。今流出関数による場合は前述のように連続式を根本において流出量 Q と貯溜量 S との間に一義的關係 $Q = \alpha S$ を成立させているので、この α の性格について概観すると次のようである。

今 x を上流原点から流域(河道)沿いの距離とし、流積 $A(x)$ であるとして $x = X$ なる流出地点で $t = T$ 時刻の X 点上流の流域(河道)

の貯溜量を S とすると $S(x) = \int_0^X A(x) \alpha x$ であるから例えば $A(x) = Cx^m$

ならば $S(x) = \frac{c}{m+1} X^{m+1} = \frac{A(x)}{m+1} X$

$$\alpha = \frac{Q(x)}{S(x)}, \quad \frac{Q}{A} = V \text{ とおくと } \alpha = \frac{X}{(m+1)} \cdot V \dots\dots\dots(4)$$

また例えば $A(x) = Ce^{\beta x}$ ならば

$$S(x) = C \frac{e^{\beta x}}{\beta} = \frac{A(x)}{\beta} \quad \therefore \alpha = \beta V \dots\dots\dots(5)$$

いずれにしても、 α は $\frac{Q(x)}{A(x)} = V(x)$ (流速) に比例するものようである。

さらに α の認識として、貯溜量 S からの流出量 Q の引き出し率という見方もできることは以前からいわれてきていることであって、これは時間 t に関して $\left(\frac{Q(t)}{S(t)} = \alpha\right)$ 認識される一面である。

参考文献 - (2)

* (6) 「特性曲線法による出水解析について」；末石 富太郎，土木学会論文集29号，昭和30年12月

7. 本考察の応用

(a) 流出解析に当たって実流出と適合させる場合への応用

流出解析の実際は次のようにわけられる。すなわち

(イ) 与えられた1地点において

i) 直接流出と基底流出とのように α , n , の異なる流出を分離して適合をよくする試み

ii) 降雨（流入）規模の違う洪水の間にこの規模に相関させた n , α , を適用して適合をよくする試み

iii) 降雨（流入）の流域内の偏りがあるインデックに相関させて適合をよくする試み {ただしこの項は流入自体の問題としてここではとり上げない}

(ロ) 流出機構の既知の地点から他の地点 {流域の同一であるなしを問わず} に流出特性を移行する試み

などが主なものであるがこの時には3および5, 6で述べたことが種々のヒントを与える。すなわち，一般流出関数によるときは，(3)式のように

$t_{pk+i} = \frac{\ln \alpha_{k+1}}{\alpha_{k+1}}$ に従ってピーク時刻がずれ，ピーク値は $Q_{k+1 \text{ peak}} = Q_k(t_{pk+i})$ となって次数が増大して行く，また特殊流出関数によるときは

$t_p = \frac{n-1}{\alpha}$ に従ってピーク時刻がずれ，ピーク

値は $\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \alpha / (n-1)!$

となって行く，これを自由度からみると特殊流出関数の場合は要素が t_p , n , α , $peak$ 量のうち2量だけが自由であるということになるが，一般流出関数については $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ が要素に加わって自由度が一段と増大する。また6のような考察は解析地点の変更役に役立つ。

(b) 実際計算に当たっての応用

以上述べたことによって流出関数による場合，ユニットグラフによる計算も貯溜法による計算も結果はまったく同じであることがわかるからなれた方法に従えばよいのであるが n , α の影響をいちいち検討しながら次数をあげて系統的に計算を進めるのは貯溜法の手法がよいとも思われる。

また電子計算機が発達してきた現在では系統的な計算方法のほうが便利となりつつあるようである。

実際計算に当たって現在一般的なものは次の2つに大別される。

i) デジタル計算として手計算，デジコン計算によるときは

$$s_1 - \frac{Q_1}{2} \Delta t + \frac{I_2 + I_1}{2} \Delta t = s_2 + \frac{Q_2}{2} \Delta t \quad \text{において}$$

Δt を単位時間とし

$$s = \frac{Q}{\alpha}, \quad Q_1 \rightarrow Q_{(N, I-1)}, \quad Q_2 \rightarrow Q_{(N, I)},$$

$$I_1 \rightarrow Q_{(N-1, I-1)}, \quad I_2 \rightarrow Q_{(N-1, I)}, \quad Q_{(次数, 時刻)},$$

$$X = \frac{1}{\alpha N} - \frac{1}{2}, \quad Y = \frac{1}{\alpha N} + \frac{1}{2} \quad \text{とすると計算は順}$$

次に次式を計算すればよい

$$\text{まず } Q_{(N, I)} = \bar{Q}_{(N, I-1)} \frac{X}{Y} + (\bar{Q}_{(N-1, I-1)} + \bar{Q}_{(N-1, I)}) \frac{1}{2Y}$$

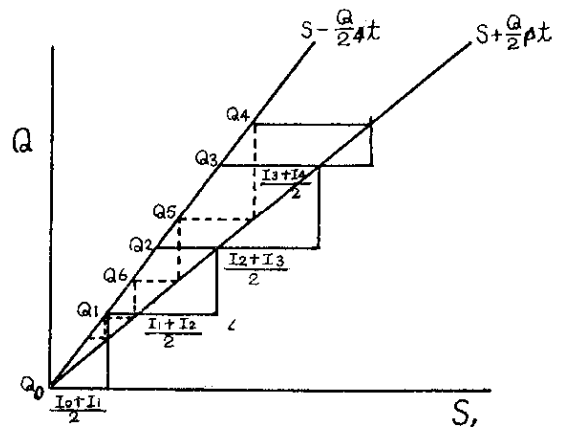
$$\text{を計算し}$$

$$I := I + 1$$

$$\text{ついで } \bar{Q}_{(N, I-1)} := Q_{(N, I)}, \quad \bar{Q}_{(N-1, I-1)}$$

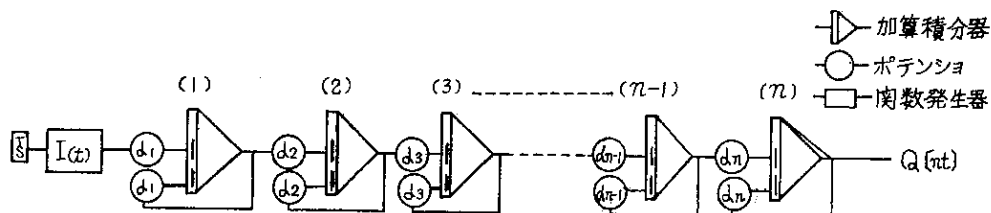
$:= Q_{(N-1, I)}, \quad \bar{Q}_{(N-1, I)} := Q_{(N-1, I+1)}$ と置換えて所要時間，所要次数繰り返して計算するようにプログラムすればよい。

ii) アナログ計算として図式計算，アナコンによる計算があげられるが，まず図式計算は α が一定でなくとも手数は α が一定の時と変わらず便利である。例として物部法をあげる。



水理公式集（昭和38年版）P.99 参照これを必要回数繰り返す。

アナコンによる場合は流出関数のラプラス変換が多次の伝達関数であるから次のようになる。



ただし、演算増巾器の性格上各次の流入と流出とは符号が反転するので複合流出ではとくに注意を要する。なお巻末に石狩川シュミレータのパーツによる計算例を示す。

8. あとがき

この考察は石狩川洪水シュミレータの改善業務の一端

として、石狩川開発建設部技術長宮前技官の指導のもとにとりまとめたもので、数学的照査は同部工務第一課山口技官の労をわずらわせた。また一般的に開発局土木試験所河川研究室長小川技官の労をもわずらわした。末筆ながらここに記し以って感謝の意を表わす次第である。

(1967.8.30 記)

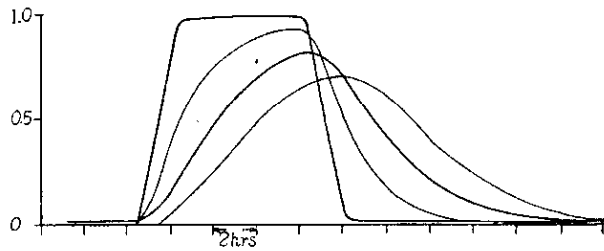


図-1

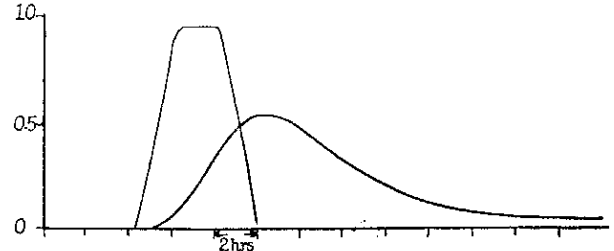


図-4

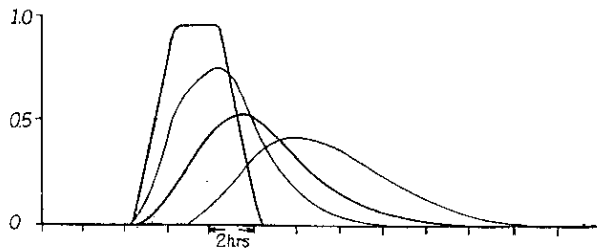


図-2

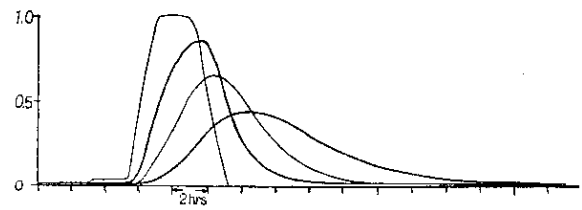


図-5

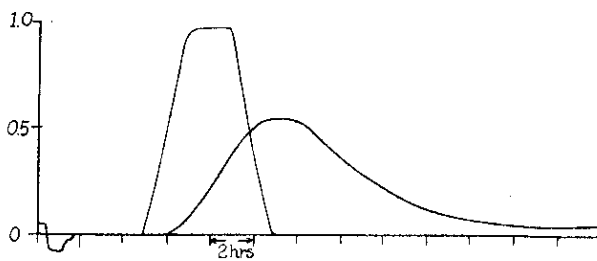


図-3

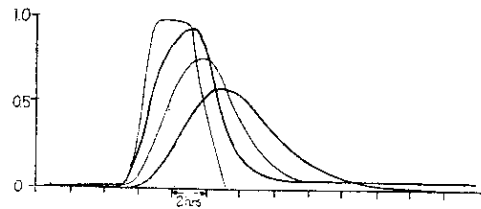
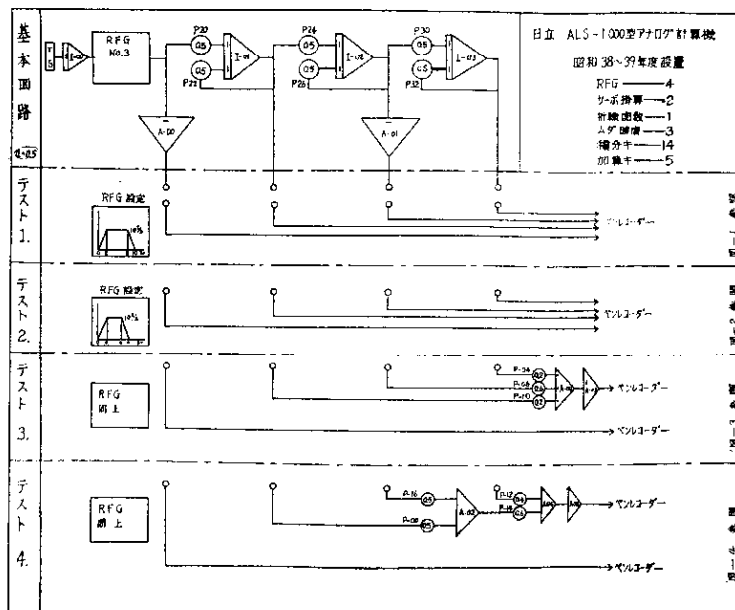


図-6



テスト5は基本回路について

P20, P22 を 0.7

P24, P26 を 0.5

P30, P32 を 0.3

としRFGはテスト2と同じもので図-5に示した。

テスト6は基本回路について

P20, P22 を 0.9

P24, P26 を 0.7

P30, P32 を 0.5

としRFGはテスト2と同じもので図-6に示した。