

北広島流出試験地における流出特性

Runoff Characteristics at the Kita-Hiroshima Experimental Basin

星 清* 本間 隆** 西村 豊***

北広島流出試験地において、昭和45年から水文観測調査を進めてきた。本報告では既往洪水資料から、表面流出が卓越していると考えられる比較的大きな出水例(比流量で $0.5 \text{ m}^3/\text{s}/\text{km}^2$ 以上)を抽出し、貯留関数法を適用してこの試験地における流出特性を考察する。また、モデルパラメータを2手法で同定し、相互の関連性を検討する。

《流出試験地；貯留関数法；等価粗度法；最適化手法》

1. はじめに

河川研究室では、札幌圏都市計画区域として団地造成の行われた広島町で流域の都市化に伴う流出機構の変化把握を目的として、昭和45年から水文観測を続けてきた。調査項目は河川水位、雨量、地下水位、総合気象である。また、2~3年ごとに航空写真により流域の地被状態を調査している。北広島流出試験地の既往洪水資料に貯留関数法、タンクモデル法、等価粗度法などの流出解析手法が適用されてきた。しかしながら、高水時における流量観測資料の不足などにより、流域都市化の流出に及ぼす影響を明確に把握するにいたっていない。

貯留関数法は集中定数系モデルであるため、実際の流出解析に広範に用いられている。貯留関数モデルパラメータの同定には2つの方法が考えられる。その1つはパラメータの物理性を考慮して、等価粗度モデルパラメータに関連づける方法である。もう1つは、数学的最適化手法を駆使して、実測ハイドログラフに最も適合するようにパラメータの同定を行う方法である。本報告では、上記2つの方法によるパラメータの整合性について検討する。

2. 採用流出モデル

計算の簡便さという理由から、貯留関数モデルが洪水流出解析に多用されてきている。しかしながら、貯留関数モデルはどんな洪水流出にも適合度がよいわけではなく、おのずから限界があることに留意すべきである。一応の目安としては、ピーク比流量が $1 \text{ m}^3/\text{s}/\text{km}^2$ 以上のと

き貯留関数モデルの適合度がよくなるというのがこれまでに得られている研究成果である。貯留関数法の実際の適用にあたってのもう1つの問題点として、モデルパラメータと流域特性値および降雨特性値との相互関係が不明の場合には、貯留関数法は流量資料が完備していない流域におけるハイドログラフ推定に適用できないことがあげられる。この解決法として、近年、降雨流出過程の物理機構、すなわち、雨水流の挙動に関する水理式を基礎にした等価粗度法(Kinematic waveモデルともいわれている)を貯留関数モデルに変換する研究が盛んに行われている^{1),2),3)}。等価粗度法と貯留関数モデルが、どのような関係にあるのかを以下に概説する。

一定勾配斜面上の流れを等価粗度モデルで表現すれば、次式で与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \quad (0 \leq x < L) \quad (1)$$

$$q = \alpha h^m \quad (2)$$

$$s = \int_0^L h(x, t) dx \quad (3)$$

ここで、 t : 時間、 x : 斜面上流端からの距離、 h : 水深、 q : 斜面単位幅流量、 s : 斜面単位幅貯留量、 r : 有効降雨強度、 L : 斜面長、 α 、 m : 斜面流定数

斜面流定数 α 、 m は流れがどのような平均流速式で表現されるかによって、次のように分類される⁴⁾。

$$\text{層流: } \alpha = gi/3\nu, \quad m = 3 \quad (4)$$

$$\text{マニング: } \alpha = \sqrt{i}/n, \quad m = 5/3 \quad (5)$$

$$\text{シェジュー: } \alpha = C\sqrt{i}, \quad m = 3/2 \quad (6)$$

*河川研究室長 **同室員 ***同室主任研究員

$$\text{ダルシー: } \alpha = k_T i / \lambda, \quad m = 1 \quad (7)$$

ここで、 ν : 動粘性係数, g : 重力加速度, i : 斜面勾配, n : 等価粗度, C : シェジュー係数, λ : 表層土の有効間隙率, k_T : 表層土の透水係数

等価粗度法が準物理モデルといわれる理由は、上述したように、パラメータの物理的意味が明確なことによる。大洪水（比流量が大）においては、表面流出が卓越していると考えられるから(4)~(6)式が適用される。一方、中小洪水（比流量が小）においては、(7)式の間間流出モデルがよく用いられている。しかしながら、中間流出モデルを適用する際には、対象流域の土壌特性パラメータ λ , k_T の調査を行う必要がある。

(1), (2)式による等価粗度法は分布定数系モデルであるために、貯留関数法に比べて計算が複雑となり、実務者にとってはなじみの薄いものとなる。したがって、等価粗度法による解が貯留関数法による解と“ほぼ等しく”なるように等価粗度モデルを貯留関数モデルに変換できないか、と誰しも考えるのは自明の理である。もしこのことが可能であれば、複雑な等価粗度モデルをわざわざ使わなくても計算が迅速に行えるようになり、貯留関数法の実用面での利用価値が飛躍的に高まることになる。

先に“ほぼ等しく”と書いたが、なにをもって等価とするのかという疑問が起こってくる。この意味を少し考えてみることにする。今、有効降雨強度 r が場所に依存しないものとして、(1)式の両辺を $x=0$ から L の範囲で積分すると、次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \int_0^L h(x, t) dx + \int_0^L dq = \int_0^L r dx \quad (8)$$

あるいは、

$$\frac{d}{dt} \int_0^L h(x, t) dx + q(L, t) - q(0, t) = rL \quad (9)$$

(9)式の $q(L, t)$ は斜面末端における流量であり、 $q(0, t)$ は斜面上流端での流量であるから $q(0, t) = 0$ が成立する。(3)式を(9)式に代入すると、次式は貯留関数法の連続式に相当することになる。

$$\frac{ds}{dt} = rL - q(L, t) \quad (10)$$

一方、(2)式を(3)式に代入すると、次式が得られる。

$$s = \alpha^{-1/m} \int_0^L q(x, t)^{1/m} dx \quad (11)$$

したがって、(11)式の積分値を斜面末端の流量 $q(L, t)$ を用いて表わすことができれば、貯留方程式を誘導したことになる。すなわち、等価粗度法の貯留関数法への変換

とは、とりもなおさず(11)式の積分値を最も適合する $q(L, t)$ の関数形で表現することにほかならない。この関数形の決定にこれまで多くの努力が払われてきている。星ら^{2),5)} は等価粗度法による解から(11)式の貯留量~末端流量($s \sim q$)曲線を表現する方程式として、次式が最適であるとしている。

$$s = k_1 q^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt} (q^{p_2}) \quad (12)$$

ここで、 s : 貯留高 (mm), q : 流出高 (mm/hr), t : 時間 (hr), k_1, k_2, p_1, p_2 : モデルパラメータ

貯留関数モデルパラメータ k_1, k_2, p_1, p_2 は、等価粗度モデルパラメータ (α, m, L) および平均雨量強度 \bar{r} (mm/hr) で表わすことができる。この関係性は参考文献²⁾が詳しいので参照されたい。洪水解析から貯留量 s と流出量 q の関係は、一般にはループを描くことが多いことはよく知られている。この特性は $s \sim q$ 曲線の2価性といわれる。この2価性を表現する非線形貯留方程式として、ブラサド (Prasad)⁶⁾ は次の型式を提案している。

$$s = k_1 q^p + k_2 \frac{dq}{dt} \quad (13)$$

(12)式と(13)式の k_2 は、同じパラメータでないことに注意すべきである。ただし、(12)式において $p_2 = 1$ のとき、(12)式は形式的には(13)式に一致する。ブラサドは(13)式のモデルパラメータ k_1, k_2, p がどのような物理量で関係づけられるかについては言及していない。一方、高棹ら³⁾ は等価粗度法による解に(13)式をあてはめ、パラメータ k_1, k_2, p と等価粗度モデルパラメータとの相互関係を定量化している。高棹らによって得られた結果に(5)式のマニング則を適用して整理すると、(13)式のパラメータ k_1, k_2, p は次式で与えられる。

$$k_1 = 2.53 (n/\sqrt{i})^{0.6} A^{0.24} \quad (14)$$

$$k_2 = 0.152 k_1^2 \bar{r}^{-0.8} \quad (15)$$

$$p = 0.6 \quad (16)$$

ここで、 n : 等価粗度 (sec/m^{1/3}), i : 斜面勾配, A : 流域面積 (km²), \bar{r} : 平均雨量強度 (mm/hr)

(14), (15)式の導出にあたっては次の条件を設定した。

(a) 対象流域を流域幅 W (km), 主河道長 L_s (km) をもつ矩形で近似し、等しい長さの斜面を主河道の両側にとる。すなわち、 $L = W/2 = A/2L_s$ とした。

(b) 主河道長と流域面積の間にハック (Hack) の法則を適用して、 $L_s = 1.35 A^{0.6}$ を仮定した。

(c) 実際に観測される降雨波形は複雑であるが、それを図-1に示されるように、平均雨量強度 \bar{r} の矩形降雨に置

1) 雨
 の関
 連
 2) 時
 間
 変
 化
 (hr)
 が詳
 出量
 はよ
 わわ
 て、
 3) 注
 意
 (5)
 ラ
 4) 流
 域
 5) を
 も
 6) 則
 を
 7) 置

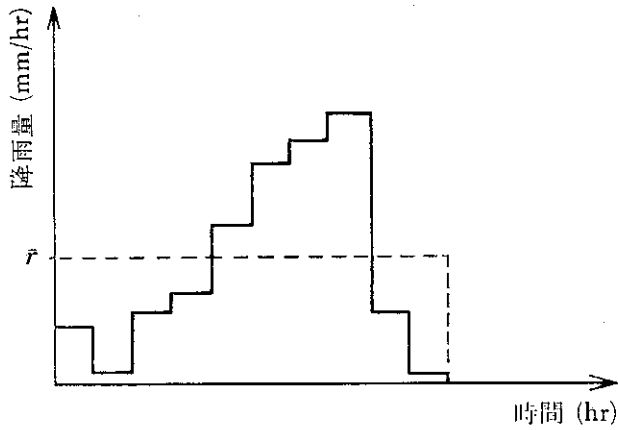


図-1 矩形降雨波形への変換

換えてパラメータを算定した。

本報告では、(13)式のプラサド貯留方程式を流出モデルとして採用し、(14)~(16)式によるパラメータ推定精度を検討してみる。

貯留関数法では次の連続式が必要となる。

$$\frac{ds}{dt} = r - q \quad (17)$$

ここで、 s : 貯留量 (mm), r : 有効雨量強度 (mm/hr), q : 直接流出高 (mm/hr), t : 時間 (hr)

(13), (17)式から次の2階非線形微分方程式が得られる。

$$k_2 \frac{d^2q}{dt^2} + k_1 p q^{p-1} \frac{dq}{dt} + q = r \quad (18)$$

(18)式は次の変数変換を行うことにより、2元連立微分

方程式で表現することができる。

$$\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = \frac{dq}{dt} \end{cases} \quad (19)$$

(19)式をそれぞれ t で微分し、その結果を(18)式に代入すると次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{k_1}{k_2} p x_1^{p-1} x_2 - \frac{1}{k_2} x_1 + \frac{r}{k_2} \end{cases} \quad (20)$$

(20)式 of 非線形連立方程式は、ルンゲ・クッタ・ギル (Runge-Kutta-Gill) 法あるいは線形化手法⁷⁾で解くことができる。

貯留関数モデルパラメータ k_1, k_2, p がハイドログラフの形状にどのように影響を及ぼすかを調べてみる。計算方法として(20)式の線形化手法を用い、入力降雨波形は同一とする。図-2にはパラメータを $k_2=10, p=0.6$ に固定し、 k_1 を変化させたときの ($k_1=2, 10, 20$) ハイドログラフ形状変化が示されている。 k_1 が小さくなるにつれてピーク流量は増大し、ハイドログラフ形状は尖頭化する。しかしながら、ピーク流量の生起時刻はほぼ同一である。一方、図-3にはパラメータを $k_1=10, p=0.6$ に固定し、 k_2 を変化させたとき ($k_2=2, 10, 20$)、ハイドログラフの形状がどのように変化するかを示す。その結果、ピーク流量はさほど変化しないが、 k_2 が小さくなるにつれてピーク流量生起時刻が早くなる。一般に流域の都市

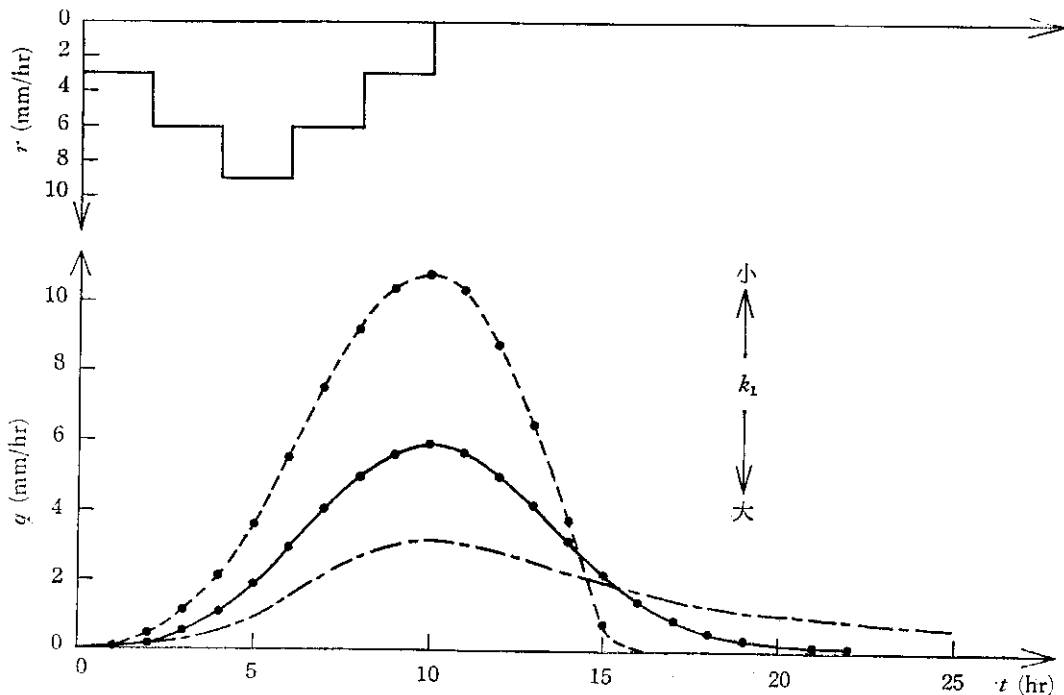


図-2 パラメータ k_1 の変化のハイドログラフ形状に及ぼす影響

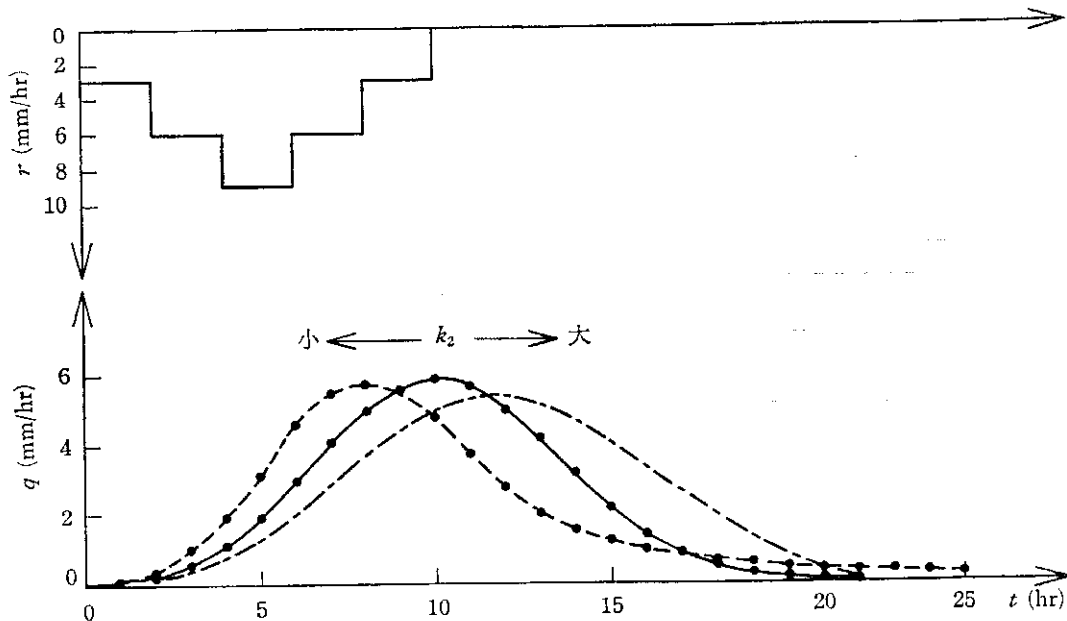


図-3 パラメータ k_2 の変化のハイドログラフ形状に及ぼす影響

化に伴ってピーク流量が増加し、その生起時刻は早まることは知られている。(14)、(15)式のパラメータの特性から、等価粗度 n が小さくなるにつれて(都市化が進む)、パラメータ k_1 と k_2 も減少することがわかる。このことは、図-2と図-3のハイドログラフの形状変化にも対応する。しかしながら、都市化現象の流出形態に及ぼす影響は等価粗度の変化だけで把握できるとは限らず、種々の要因を考慮する必要がある⁸⁾。

実測洪水資料が得られる流域においては、数学的最適手法を用いて、実測ハイドログラフに最も適合するようにモデルパラメータ k_1 , k_2 , p を同定することができる。(13)式のプラサドモデルについてのパラメータ最適化手法は参考文献7)に詳述してあるので、ここでは割愛する。なお、パラメータ k_1 , k_2 , p の最適化プログラムとその計算例を補遺に掲げた。以下に最適化計算手順を簡単に述べる。

ステップ 1: (14)~(16)式を参考にしてパラメータ k_1 , k_2 , p の初期値を設定する。

ステップ 2: 上に設定したパラメータと有効雨量系列 r を用いて(20)式を解くことにより、計算流量系列 q を得る。実測流量系列 q^* と計算流量系列 q の誤差系列 $e = (q^* - q) / \sqrt{q^*}$ を算定する。

ステップ 3: (20)式をパラメータ k_1 , k_2 , p で微分して感度係数方程式を導き、その解法により感度係数系列 $\partial q / \partial k_1$, $\partial q / \partial k_2$, $\partial q / \partial p$ を算出する。

ステップ 4: 感度係数系列と誤差系列を用いて、線形最小自乗法原理によりパラメータの補正量 Δk_1 , Δk_2 , Δp を計算する。

ステップ 5: パラメータ補正項は、繰返しが進むにつれて減少していくことが予想される。したがって、パラメータの収束条件を次のように設定する。

$$|\Delta k_1 / k_1^m| < \epsilon, \quad |\Delta k_2 / k_2^m| < \epsilon, \quad |\Delta p / p^m| < \epsilon$$

ここで、 ϵ は許容限界値で 10^{-2} ないし 10^{-3} の値を用いる。

k_1^m , k_2^m , p^m は逐次計算における m -ステップでのパラメータの値である。

上の収束条件が満足されないときは、 $k_1^{m+1} = k_1^m + \Delta k_1$, $k_2^{m+1} = k_2^m + \Delta k_2$, $p^{m+1} = p^m + \Delta p$ としてステップ 2)にもどる。

3. 解析例

対象流域は、札幌市の南東約 20 km に位置する広島町における輪厚川流域および音江別川流域である。観測施設は水位 2 カ所、雨量 4 カ所、地下水位 1 カ所、総合気象 1 カ所である。流域概要と観測施設の位置を図-4 に示す。また、対象流域の諸元を表-1 に示す。

流域の都市化を明確に定義づけることはむずかしいが、本報告においては雨水の浸透という点に着目し、宅地および道路などの不浸透域のみを都市域とした。当試験地においては、2~3年の間隔で地被変化を調査しているが、その間に都市域面積があまり変化していない期間がある。そこで、便宜上、輪厚川流域においては、第1期(昭和47~49年)、第2期(昭和50~55年)、第3期(昭和56~58年)、第4期(昭和59年~)と分割することにする。同様に、音江別川流域においても、第1期(昭和

47～48年), 第2期(昭和49年), 第3期(昭和50～55年), 第4期(昭和56年～)と4期間に分割する。

表-2には, それぞれ, 2つの流域における期間ごとの

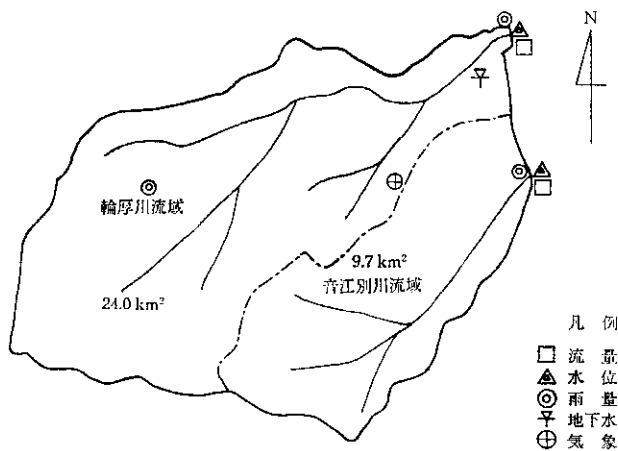


図-4 対象流域図

表-1 流域諸元

	流域面積	流路長	流路勾配
輪厚川	24.0 km ²	9.9 km	1/100
音江別川	9.7 km ²	6.0 km	1/120

平均都市域面積率の変化状況が示されている。

流出解析のための対象洪水例として, ピーク比流量が 0.5 m³/s/km²以上の出水を選定の基準とした。その結果, 表-3に示されるように, 輪厚川流域では11例, 音江別川流域では6例が洪水解析に用いられた。流域平均降雨量は, 図-4に示される4雨量観測所の算術平均により算定した。直接流出量と基底流出量の分離には, 片対数紙上でのハイドログラフ立上がり点と低減部第2折曲点を結んで直接流出量を計算した。また, 流出率を実測流域平均降雨量に乗じて有効雨量を算定した。降雨規模にも依存するが, 表-3に示される流出率と表-2に示される都市域面積率の間に明確な相関性は見いだせない。

(14)～(16)式による貯留関数モデルパラメータの推定式における未知量は $f_c = (n/\sqrt{i})^{0.6}$ だけである。したが

表-2 都市化率経年変化表

流域名	第1期	第2期	第3期	第4期
輪厚川流域	(S 47～49) 9.96%	(S 50～55) 14.47%	(S 56～58) 15.21%	(S 59～) 15.95%
音江別川流域	(S 47～48) 17.43%	(S 49) 24.61%	(S 50～55) 27.41%	(S 56～) 28.19%

表-3 対象洪水特性

河川名	洪水 No.	生起年月日	流出率	ピーク比流量 (m ³ /sec/km ²)	平均雨量強度 (mm/hr)
輪厚川	101	S 47. 5.20	0.56	0.88	4.3
	102	47. 9.24	0.70	1.80	5.4
	103	48.10.13	0.63	1.06	3.5
	104	49. 6. 6	0.37	0.54	2.8
	105	50. 7.26	0.37	1.50	4.3
	106	51.10.14	0.32	0.76	3.8
	107	52. 8. 5	0.45	2.00	10.1
	108	52. 8. 9	0.41	0.90	5.9
	109	54. 9.30	0.36	1.31	6.1
	110	57. 9.12	0.19	0.61	5.6
	111	60. 9. 1	0.49	2.44	12.4
音江別川	201	S 47. 9.16	0.22	0.79	6.0
	202	47. 9.24	0.24	0.62	7.5
	203	52. 8. 5	0.25	1.22	13.7
	204	54.10.19	0.14	0.71	5.3
	205	57. 9.12	0.31	1.46	7.2
	206	60. 9. 1	0.43	1.97	12.4

って、洪水ごとに f_c の値を種々変化させて、実測流量と計算流量との誤差が最小になるように次元探索法により最適パラメータ k_1, k_2 を同定することが可能である。以上の方法により、推定された f_c, k_1, k_2 の値が表-4に示されている。なお、表中のMSEは次式によって計算した。

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(q_i^* - q_i)^2}{q_i^*} \quad (21)$$

ここで、 q_i^* と q_i はそれぞれ、実測流量系列と計算流量系列であり、 N は流量の標本数である。

また、(15)式中の平均有効雨量強度 \bar{r} は表-3に示される平均雨量強度に流出率を乗じて算出する。従来から、山地流域河川において大中洪水を対象とする場合、 $f_c = (n/\sqrt{i})^{p,6}$ のオーダーは1~2であることが知られている。表-4に示される結果からも、 f_c の値はその近傍にあることがわかる。

次に、貯留関数モデルパラメータ k_1, k_2, p の同時最適化結果を表-5に示す。なお、表中には(21)式による誤差評価、ピーク流出高およびその生起時刻の実測値と計算値が比較されている。輪厚川と音江別川流域では指数 p の挙動に差異がみられる。すなわち、輪厚川流域では

表-4 推定式によるパラメータ

洪水 No.	$(n/\sqrt{i})^{p,6}$	k_1	k_2	MSE (mm/hr)
101	2.4	9.173	6.361	0.251
102	2.6	9.624	4.848	0.383
103	3.4	11.305	10.833	0.199
104	3.0	10.487	16.749	0.246
105	2.8	10.062	10.586	0.195
106	1.2	6.052	5.094	0.124
107	1.2	6.052	1.675	0.096
108	2.2	8.706	5.730	0.071
109	2.0	8.222	5.731	0.206
110	1.6	7.192	7.941	0.022
111	3.4	11.305	4.581	0.066
201	1.4	5.341	3.522	0.064
202	2.0	6.616	4.165	0.061
203	0.8	3.818	0.834	0.174
204	1.2	4.869	4.803	0.037
205	1.4	5.341	2.312	0.119
206	4.0	10.027	4.033	0.109

表-5 パラメータ k_1, k_2, p の最適化結果

洪水 No.	パラメータ			MSE (mm/hr)	ピーク流出高 (mm/hr)		ピーク時刻 (hr)	
	k_1	k_2	p		実測	計算	実測	計算
101	8.84	13.88	0.55	0.090	3.080	2.585	7	11
102	9.44	9.73	0.58	0.080	6.379	5.461	9	10
103	12.63	14.51	0.43	0.134	3.530	2.448	9	10
104	8.36	26.25	0.54	0.161	1.607	1.024	13	15
105	9.70	12.80	0.45	0.182	4.369	2.246	12	14
106	5.97	8.25	0.52	0.110	2.719	1.727	11	12
107	5.37	1.79	0.62	0.063	6.528	6.549	7	7
108	8.79	7.59	0.47	0.043	3.041	2.333	7	8
109	8.10	8.93	0.56	0.100	4.469	3.511	14	15
110	7.15	7.21	0.54	0.021	2.039	1.668	10	10
111	11.88	3.68	0.59	0.057	8.191	7.733	9	9
201	5.10	7.63	0.67	0.021	2.186	1.705	12	13
202	5.45	8.55	0.92	0.011	1.872	1.627	7	6
203	2.66	1.27	0.86	0.069	3.413	3.644	3	4
204	4.30	3.96	0.70	0.035	2.059	1.868	18	18
205	3.72	3.64	0.91	0.094	4.684	3.048	9	6
206	5.86	2.23	0.91	0.016	6.170	6.306	8	9

は
り大
が盛
貯留
表
の関
ロッ
つれ
プラ
度が
図-6
イド
る。
現し
表
 k_2 の
して
みに

MSE (mm/hr)
0.10
0.05
0
1
0
4
8
16
6
4
2
0
0
q (mm/hr)
↑

E
 1r)
 51
 33
 39
 16
 35
 24
 36
 71
 36
 22
 36
 64
 61
 74
 37
 19
 09

か0.6より小さい傾向にあり、音江別川流域では0.6より大きくなっている。近年、音江別川流域では砂利採取が盛んに行われており、このため、同一の流量に対して貯留量が増大していることが考えられる。

表-3と表-5の結果に基づき、比流量と適合度(MSE)の関係を、比流量 $1.0 \text{ m}^3/\text{s}/\text{km}^2$ 以上の洪水例につきプロットしたものが図-5である。比流量が大きくなるにつれてMSEが減少していることがわかる。すなわち、プラサドモデルを含めた貯留関数法は大きい出水に適合度がよく、従来から指摘されていた事実と符合する。図-6~図-11には比流量が大きい洪水例につき、実測ハイドログラフと計算ハイドログラフの比較が示されている。計算ハイドログラフは実測ハイドログラフをよく再現していると考えられる。

表-5の最適化パラメータの結果をみると、パラメータ k_2 の変動がパラメータ k_1 に比べて大きい。その理由として(14)、(15)式に示されるように、 k_1 は流域特性値のみに依存し、 k_2 は流域特性値と降雨特性値の双方に依存

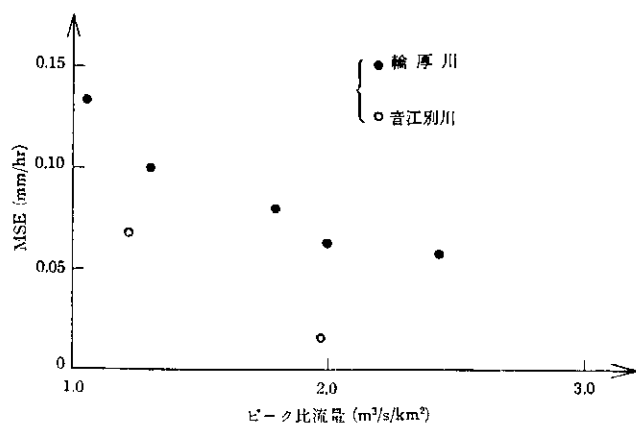


図-5 適合度と比流量の関係

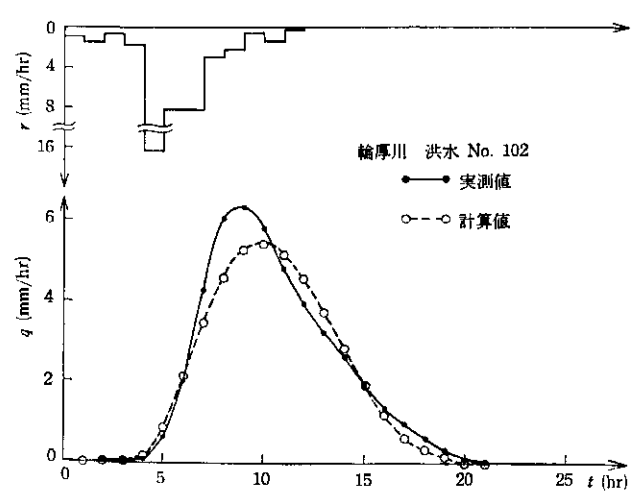


図-6 輪厚川における実測・計算ハイドログラフの比較

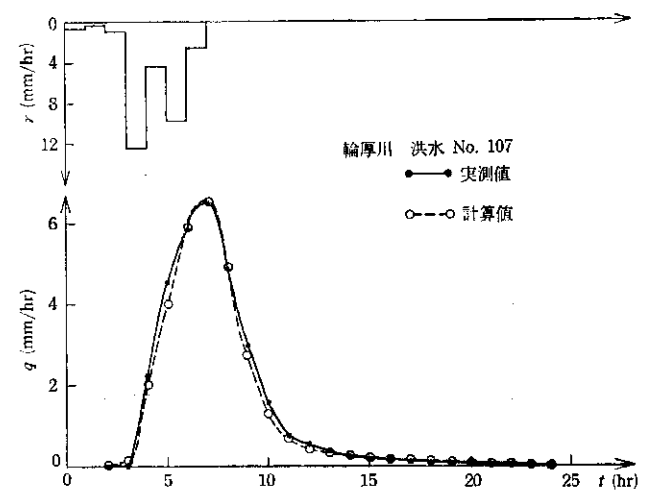


図-7 輪厚川における実測・計算ハイドログラフの比較

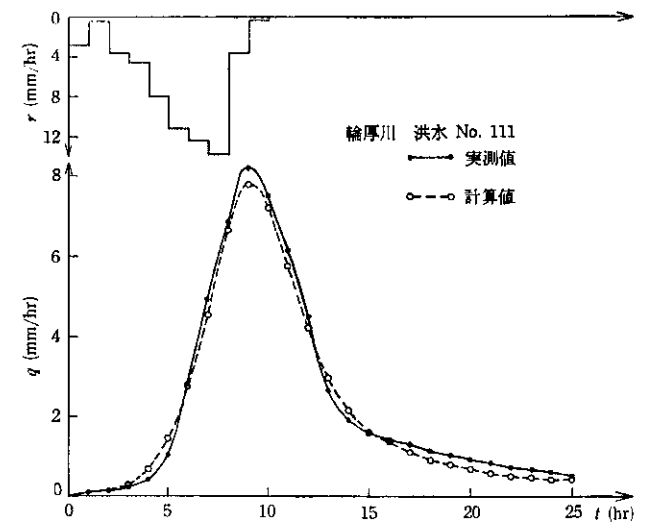


図-8 輪厚川における実測・計算ハイドログラフの比較

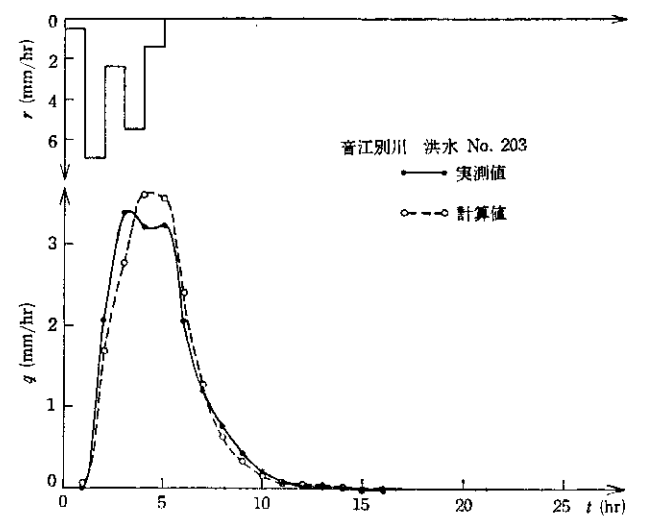


図-9 音江別川における実測・計算ハイドログラフの比較

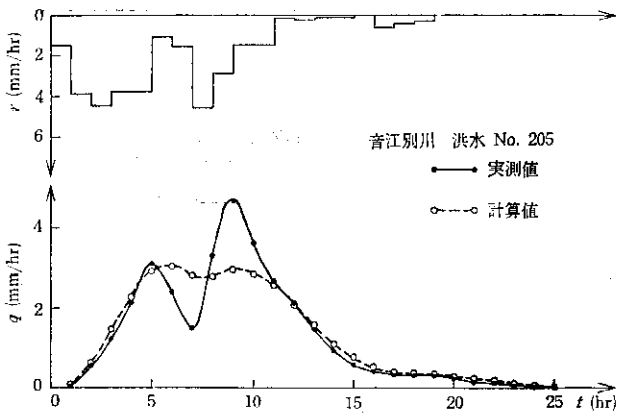


図-10 音江別川における実測・計算
ハイドログラフの比較

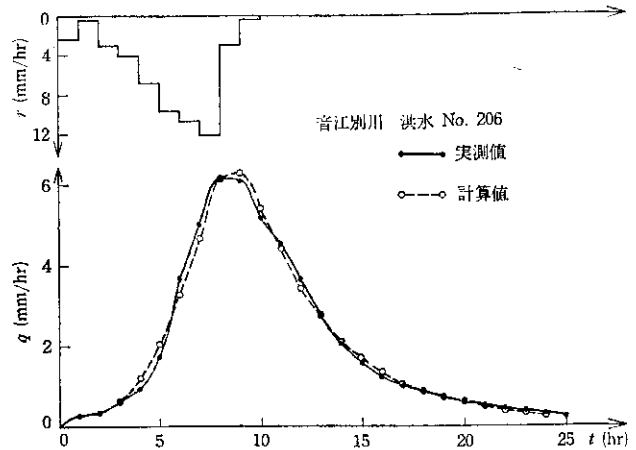


図-11 音江別川における実測・計算
ハイドログラフの比較

していることがあげられる。そこで、表-5のパラメータ k_2 の値を $\bar{p}=0.8$ で除して ((15)式参照)、表-2に示される期間ごとにその平均値を算出して、都市化率との関係をプロットした結果が図-12に示されている。すなわち、都市化率が増加するに伴い、パラメータ k_2 は減少傾向にある。図-3にパラメータ k_2 のハイドログラフ形状に及ぼす影響を示したが、 k_2 が減少することによりピーク流量生起時間が早まることに対応する。

表-4の結果においては、貯留方程式の指数 p を $p=0.6$

に固定しているのに反して、表-5の結果では p の最適同定も行っている。したがって、厳密には双方の結果を比較することができない。そこで、貯留方程式指数を $p=0.6$ に固定して、再度パラメータ k_1 と k_2 の最適同定を行った結果が表-6に示されている。表-5と表-6を比較してもわかるように、輪厚川流域では評価基準(MSE)に顕著な差はみられず、パラメータ k_1 , k_2 とも大きくは変化していない。音江別川流域では、 $p=0.6$ に固定した影響

表-6 パラメータ k_1 , k_2 の最適化結果

洪水 No.	パラメータ		MSE (mm/hr)	ピーク流出高 (mm/hr)		ピーク時刻 (hr)	
	k_1	k_2		実測	計算	実測	計算
101	8.33	14.14	0.091	3.080	2.575	7	10
102	9.02	9.64	0.081	6.379	5.470	9	10
103	10.20	17.55	0.140	3.530	2.400	9	10
104	8.55	26.31	0.183	1.607	0.995	13	14
105	9.69	13.12	0.191	4.369	1.949	12	14
106	5.75	6.41	0.114	2.719	1.719	11	12
107	5.64	1.98	0.058	6.528	6.572	7	7
108	7.73	8.48	0.047	3.041	2.263	7	8
109	7.92	9.93	0.113	4.469	3.378	14	15
110	6.88	7.63	0.021	2.039	1.651	10	10
111	11.66	3.72	0.057	8.191	7.697	9	9
201	5.33	7.49	0.022	2.186	1.738	12	13
202	6.33	8.55	0.022	1.872	1.636	7	7
203	3.42	1.14	0.112	3.413	3.992	3	4
204	4.71	4.24	0.036	2.059	1.912	18	18
205	5.66	4.69	0.114	4.684	3.168	9	9
206	9.86	2.08	0.090	6.170	7.314	8	9

k_2/\bar{p}
 30
 20
 10
 0
 10
 5
 0
 がMS
 0.6に
 と最適
 調べら
 パラメ
 手法は
 料不完
 有効と
 パラメ
 図-13
 (14)式
 い。

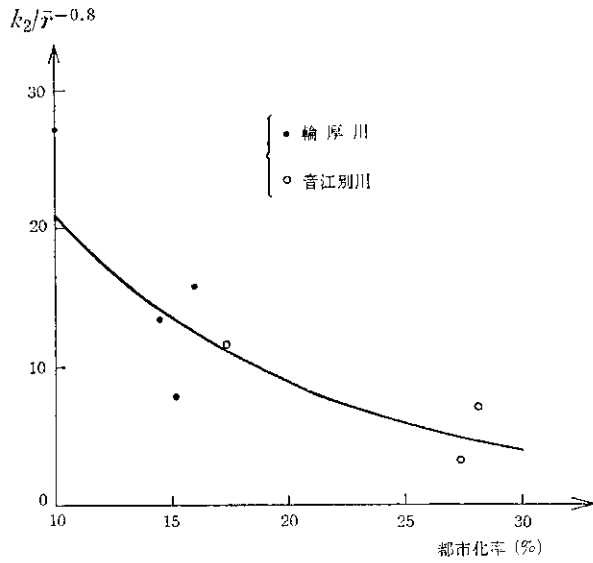


図-12 パラメータ k_2 と都市化率の関係

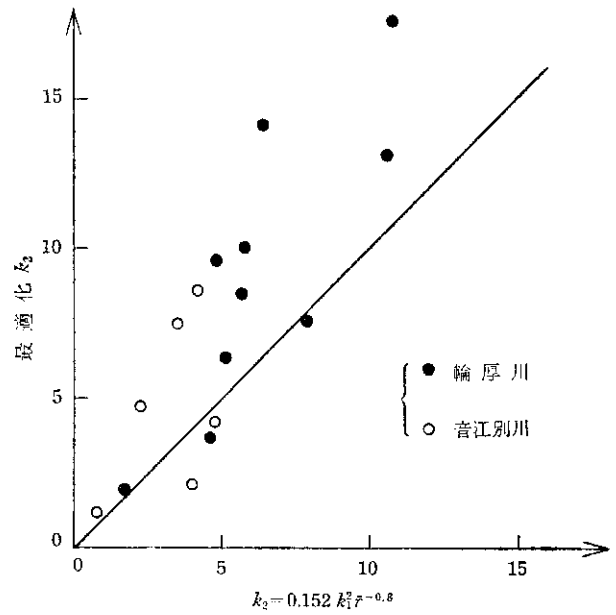


図-14 最適値と推定値の比較

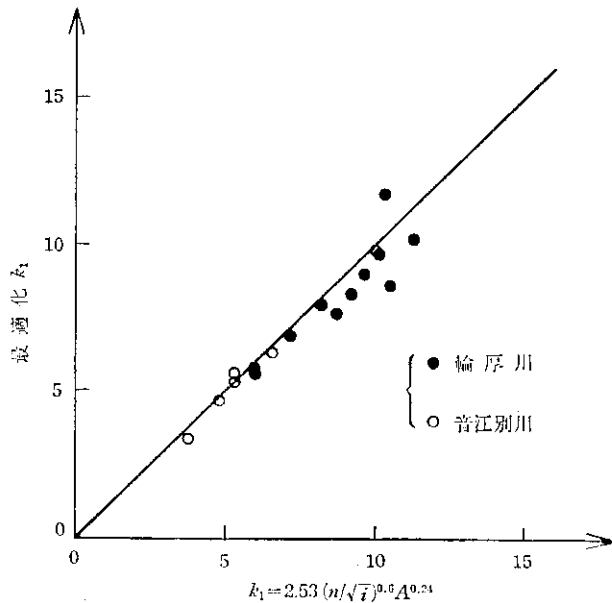


図-13 最適値と推定値の比較

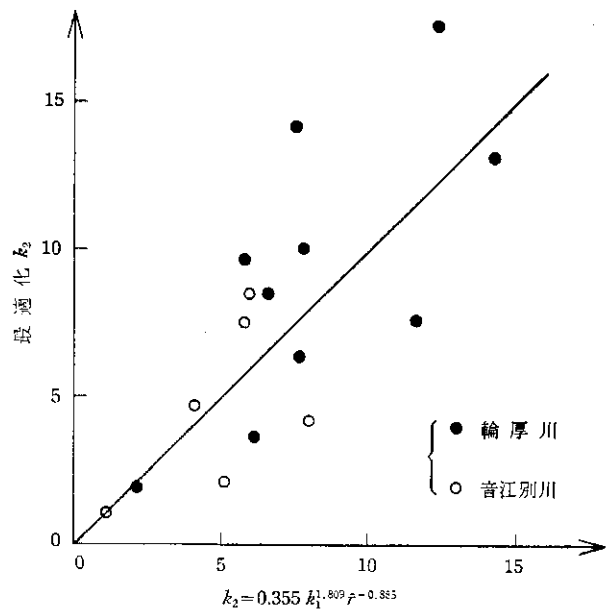


図-15 推定式の適合度

がMSEと計算ピーク流出高に若干現われている。 p を0.6に固定した上で、(14)、(15)式によるパラメータ推定値と最適パラメータ値との間でのどのような関係があるかを調べることは実用上重要である。もし両者の方法によるパラメータ値に顕著な差異が認められない場合、最適化手法は不必要となり、(14)、(15)式の実用推定式は流量資料不完備の流域においてヒドログラフを推定するのに有効となる。以上の理由により、表-4と表-6の結果をパラメータ k_1 と k_2 につきプロットすると、それぞれ、図-13と図-14が得られる。パラメータ k_1 については、(14)式による推定値と最適値に実用上大きな差異はない。一方、パラメータ k_2 については、最適値の方が(15)

式による推定値より大きい傾向にある。(15)式の導出にあたっては図-1に示されるように、実際の降雨波形を矩形波形で置換えた。この降雨波形の単純化が図-14の結果の差異に影響していることも考えられる。そこで、最適化パラメータ k_2 (表-6参照)につき、(15)式の関数形を参考にして、最小自乗法により k_2 を k_1 と $\bar{\gamma}$ で表わすと次式が得られる。

$$k_2 = 0.355 k_1^{2.809} \bar{\gamma}^{-0.885} \quad (22)$$

(15)式と(22)式を比較すると、 k_1 と $\bar{\gamma}$ にかかる指数は同オーダーであるが、定数項は大きく変化している。(22)

最適化手
法を比較
し、顕著
な変化に
影響

算

式の適合度を図-15に示すが、依然としてバラツキは大きい。

今後は、他流域における大出水例を蓄積して、(22)式の妥当性を検証していく必要がある。その結果、プラサドモデルの総合化が可能となろう。

4. おわりに

北広島流域試験地における既往洪水資料に関して、これまでにも数多くの流出解析手法が試みられてきた。

どのような流出解析法を採用するにしても、流量精度が一番問題となる。当試験地における昭和60年9月の洪水では、ほぼピーク流量生起時に流量観測を実施することができた(輪厚川で約55 m³/s, 音江別川で約14 m³/s)。その結果、図-8と図-11に示されるように、計算ハイドログラフ形状特性は実測のそれを良好に再現している。上記の流量観測資料を除いた水位～流量曲線の補間による輪厚川の昭和60年9月洪水のピーク流量は100 m³/sにも達する。したがって、どのような流出モデルを用いても計算ハイドログラフを実測のそれに適合させることは不可能であったと考えられる。今後とも、高水時における流量観測体制を強化し、流出試験地における流出機構解明の一助としたい。

参 考 文 献

- 1) 永井明博, 角屋 睦; 洪水流出モデルの適用比較—丘陵山地流域及び市街地流域を対象として—, 京都大学防災研究所年報, 第21号, 1978.
- 2) 星 清, 山岡 勲; 雨水流法と貯留関数との相互関係, 第26回水理講演会論文集, 1982.
- 3) 高棹琢馬, 宝 馨, 楠橋康広; 貯留関数型洪水流出モデルの比較評価, 第29回水理講演会論文集, 1985.
- 4) 角屋 睦; 流出解析手法(その6), 農業土木学会誌, 第48巻, 第6号, 1980.
- 5) 星 清, 山田孝治; 小流域におけるハイドログラフ推定法, 土木試験所月報, No. 380, 1985.
- 6) Prasad, R.; A nonlinear hydrologic system response model, Jour. of Hydraul. Div., Proc. of ASCE, Vol. 93, No. HY4, 1967.
- 7) 本間 隆, 星 清; 貯留関数モデルパラメータの最適同定, 第28回北海道開発局技術研究発表会論文集, 1985.
- 8) 角屋 睦; 都市化に伴う流出の変化, 土木学会論文集, 第363号/II-4, 1985.

補 遺 Fortran による最適化プログラムと計算例

プラサドによって提案された貯留方程式のパラメータ k_1, k_2, p の同時最適化プログラムとその計算例を以下に示す。まず、入力変数名は次のとおりである。

N: 微分方程式の階数

M: パラメータ数

NL, H: 数値解に必要な1時間の分割数と計算時間
間隔

P: 収束許容限界値

NR, NQ: 雨量標本数と流量標本数

KOUNT: 最大繰返し回数

CK1, CK2, WPP: パラメータ k_1, k_2, p の初期値で、
(14)~(16)式を参考にして設定する。

R(I): 有効雨量系列 (mm/hr)

Q(I): 実測流量系列 (mm/hr)

次に、副プログラムの機能を以下に示す。

PRASAD: (20)式の線形化手法によって、 q と dq/dt について数値解 (X(I)) を得る。同時に、感度係数 $\partial q/\partial k_1, \partial q/\partial k_2, \partial q/\partial p$ (U(I)) を計算する。

COMREG: 最適値探索ごとにパラメータの補正項、
 $\Delta k_1, \Delta k_2, \Delta p$ (DPA(I)) を計算する。

SQCOV: 感度係数系列 (PAS(I, J)) の分散・共分散
行列 (COV(I, J)) を計算する。

JACOBI: 対称行列 (COV(I, J)) の固有値 (ROOT(I))
と固有ベクトル行列 (EIG(I, J)) を計算する。大抵の
計算機にはこの副プログラムが備えてあるので、それ
を代用することも可能である。

計算例として、表-5に示した洪水番号111(輪厚川昭
和60年9月洪水)についての出力結果を示す。結果内
のJ(K)は(21)式のMSEに対応する。この例では、
6回の繰返しで最適値が得られている。

(1) 主プログラム

```
C** MAIN PROGRAM
C** OPTIMIZATION OF PARAMETERS FOR THE PRASAD MODEL
C** STORAGE-DISCHARGE RELATIONSHIP ;
C** *** S = K1*Q**P + K2*DQ/DT **
DIMENSION R(50),Q(100),QC(100),PAS(100,5),DPA(5)
DIMENSION X(5),U(10),ER(100),Z(5)
COMMON/ST1/WK1,WK2,WPP,RAIN,H,N,M
COMMON/ST2/CK1,CK2
DATA N,M,NL,H,P/2,3,10,0.1,0.01/
C** INITIAL VALUES OF K1, K2, AND P
READ(5,1) CK1,CK2,WPP
1 FORMAT(3F10.0)
READ(5,2) NR,NQ,KOUNT
2 FORMAT(3I3)
READ(5,3)(R(I),I=1,NR)
3 FORMAT(10F7.0)
READ(5,3)(Q(I),I=1,NQ)
C** NORMALIZED VALUES OF K1 AND K2
DATA YK1,YK2/1.0,1.0/
M1=M+1
M2=2*M
WP1=WPP
XNQ=NQ
FAC=0.0
WRITE(6,14)
14 FORMAT(1H0,5X,' NO YK1 YK2 P
+ J(K)')
C** START OPTIMIZATION
DO 999 KKLL=1,KOUNT
WK1=CK1*YK1
ZK2=CK2*YK2
WK2=1./ZK2
WP2=WPP
DO 800 I=1,N
800 X(I)=0.0
DO 802 I=1,M2
802 U(I)=0.0
SUM=0.0
DO 30 LL=1,NQ
RAIN=0.0
IF(LL.LE.NR) RAIN=R(LL)
QQ=Q(LL)
QS=0.0
IF(QQ.GT.0.0) QS=SQRT(QQ)
```

データの
会論
会論
算例
メータ
以下に
時間
値で、
 dq/dt
数 $\partial q/$
E項、
分散
 $DT(I)$
大抵の
それ
享川昭
結果内
では、

```

DO 40 K=1,NL
C** SOLUTION OF SENSITIVITY EQUATION
CALL PRASAD(X,U,1)
C** SOLUTION OF SYSTEM EQUATION
C**
CALL PRASAD(X,U,2)
IF(X(1).LE.0.0) X(1)=0.0
40 CONTINUE
ERR=QQ-X(1)
QRE=0.0
IF(QQ.GT.0.0) QRE=ABS(ERR/QQ)
ER(LL)=ERR
QC(LL)=X(1)
ERW=ERR/QS
SUM = SUM + ERW**2
C** SENSITIVITY COEFFICIENTS
DO 42 I=1,M
42 PAS(LL,I)=U(I)/QS
C** ERROR BETWEEN OBSERVED AND COMPUTED DISCHARGES
C**
PAS(LL,M1)=ERW
30 CONTINUE
SUM=SUM/XNQ
WRITE(6,204) KKLL,YK1,YK2,WPP,SUM
204 FORMAT(1H ,I10,4F10.4)
Z(1)=YK1
Z(2)=YK2
Z(3)=WPP
C** COMPONENT REGRESSION METHOD
C** TO SOLVE THE CORRECTION TERMS OF PARAMETERS
C**
CALL COMREG(5,M1,100,NQ,PAS,DPA)
DO 875 I=1,M
COL = ABS(DPA(I)/Z(I))
IF(COL.GT.P) GO TO 877
875 CONTINUE
GO TO 879
877 FAC = 0.5*(1.+FAC)
DO 878 I=1,M
DPA(I)=FAC*DPA(I)
878 CONTINUE
DO 991 I=1,M
XNEW=Z(I)+DPA(I)
IF(XNEW.GT.0.0) Z(I)=Z(I)+DPA(I)
991 CONTINUE
YK1=Z(1)
YK2=Z(2)
WPP=Z(3)
999 CONTINUE

```

```

879 WRITE(6,825)
825 FORMAT(1H0,16X,'INITIAL VALUES OF PARAMETERS')
WRITE(6,826)
826 FORMAT(1H0,16X,'          C1          C2          P'//)
WRITE(6,827) CK1,CK2,WP1
827 FORMAT(1H ,F25.3,2F10.3)
WRITE(6,805)
805 FORMAT(1H0,16X,'*** OPTIMIZED PARAMETERS ***')
WRITE(6,806)
806 FORMAT(1H0,16X,'          K1          K2          P'//)
WRITE(6,850) WK1,ZK2,WP2
850 FORMAT(1H ,F25.3,2F10.3///)
DO 70 LL=1,NQ
RAIN=0.0
IF(LL.LE.NR) RAIN=R(LL)
WRITE(6,809) LL,RAIN,Q(LL),QC(LL),ER(LL)
809 FORMAT(1H ,I10,F10.4,3F10.4)
70 CONTINUE
STOP.
END

```

(2) 副プログラム

```

SUBROUTINE PRASAD(X,U,IJK)
C**  NONLINEAR STORAGE FUNCTION PROPOSED BY PRASAD
C**  *** S = K1*Q**P + K2*DQ/DT **
C**  DISCRETE FORM OF N-VECTOR DIFFERENTIAL EQUATION 16
C**  X(K+1)= PHI*X(K) + GAMMA*B(K)
C**  IJK = 1 ; SOLVE SENSITIVITY EQUATION 18
C**  IJK = 2 ; SOLVE SYSTEM EQUATION
C**  20
DIMENSION X(1),U(1),Y(5),B(5),UU(10)
COMMON/ST1/WK1,WK2,WPP,RAIN,H,N,M
COMMON/ST2/CK1,CK2
M1=M+1
M2=2*M
H2=H**2
H3=H2*H
H4=H3*H
A=0.
D=0.0
C=0.0
Y1=X(1)
Y2=X(2)
IF(Y1.GT.0.0) GO TO 12
IF(Y1.LT.0.0) Y1=0.0
GO TO 14
12  A=Y1**(WPP-1.)
    D=Y1**(WPP-2.)
    C= ALOG(Y1)
14  A1=-WK1*WK2*WPP*(WPP-1.)*D*Y2-WK2
    A2=-WK1*WK2*WPP*A
    A3=A1+A2**2
    A4=A1+A3
C**  ELEMENTS OF PHI MATRIX (TRANSITION MATRIX)
C**
    F1 = 1. +0.5*A1*H2+A1*A2*H3/6.+A1*A3*H4/24.
    F2 = H*(1. + 0.5*A2*H+A3*H2/6.+A2*A4*H3/24.)
    F3 = A1*F2
    F4 = 1. +A2*H+0.5*A3*H2+A2*A4*H3/6.+
+ (A1*A3+A2**2*A4)*H4/24.
C**  ELEMENTS OF GAMMA MATRIX
C**
    G2 = H2*(0.5+A2*H/6.+A3*H2/24.)
    G4 = H*(1. + 0.5*A2*H+A3*H2/6.+A2*A4*H3/24.)
IF(IJK.EQ.2) GO TO 104

```

```

C** SOLVE SENSITIVITY EQUATION
B(1)=-CK1*WK2*WPP*A*Y2
B(2)=CK2*WK2**2*(WK1*WPP*A*Y2 + Y1 - RAIN)
B(3)= -WK1*WK2*A*Y2*(1. + WPP*C)
DO 16 I=1,M
16 UU(I)= F1*U(I) + F2*U(I+M) + G2*B(I)
DO 18 I=M1,M2
18 UU(I) = F3*U(I-M) + F4*U(I) + G4*B(I-M)
DO 20 I=1,M2
20 U(I)=UU(I)
RETURN
C** SOLVE SYSTEM EQUATION
C** LINEARIZATION OF NONLINEAR FUNCTION
C**
104 B1=WK1*WK2*WPP*(WPP-1.)*A*Y2+WK2*RAIN
Y(1) = F1*X(1)+F2*X(2)+G2*B1
Y(2) = F3*X(1)+F4*X(2)+G4*B1
DO 102 I=1,N
102 X(I)=Y(I)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SQCOV(N1,N,M1,MD,X,COV)
C** COMPUTE COVARIANCE MATRIX
DIMENSION X(M1,N1),COV(N1,N1)
DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,I
S=0.
DO 12 K=1,MD
12 S=S+X(K,I)*X(K,J)
10 COV(I,J)=S
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE COMREG(N1,N,M1,MD,X,DPA)
C** COMPONENT REGRESSION METHOD
C** COMPUTE THE CORRECTION TERMS OF PARAMETERS (DPA)
DIMENSION X(M1,N1),DPA(1),COV(5,5),G(100,5),Y(100,5)
DIMENSION ROOT(5),EIG(5,5),BINV(5,5)
DIMENSION COE(5),ST(5)
NA=N-1
C** COMPUTE COVARIANCE MATRIX
CALL SQCOV(N1,NA,M1,MD,X,COV)
DO 50 I=1,NA
50 ST(I)=SQRT(COV(I,I))
DO 52 I=1,NA
S=ST(I)
DO 52 J=1,I
S1=ST(J)
COV(I,J)=COV(I,J)/(S*S1)
52 COV(J,I)=COV(I,J)
C** COMPUTE EIGENVALUES (ROOT) AND EIGENVECTORS (EIG)
C** OF SYMMETRIC MATRIX (COV)
C**
CALL JACOBI(NA,N1,1,COV,ROOT,EIG,IROT)
DO 18 J=1,NA
S=ABS(ROOT(J))
S=SQRT(S)
DO 18 I=1,NA
BINV(I,J)=EIG(I,J)/S
18 CONTINUE
DO 54 J=1,NA
S=ST(J)
DO 54 I=1,MD
54 Y(I,J)=X(I,J)/S
DO 20 I=1,MD
DO 20 J=1,NA
S=0.
DO 22 K=1,NA
22 S=S+Y(I,K)*BINV(K,J)
20 G(I,J)=S
DO 24 I=1,NA
S=0.0
DO 26 J=1,MD
26 S=S+G(J,I)*X(J,N)
24 COE(I)=S
DO 30 I=1,NA
S=0.
DO 29 J=1,NA
29 S=S+BINV(I,J)*COE(J)
30 DPA(I)=S/ST(I)
RETURN
END

```



```

SUBROUTINE JACOBI(N,N1,IVEC,A,D,V,IROT)
C EIGEN PROBLEM SOLUTION BY JACOBI METHOD
C A(I,J):INPUT OF SYMMETRIC MATRIX
C D(I) :EIGEN VALUES
C V(I,J):EIGEN VECTOR MATRIX
DIMENSION A(N1,N1),D(10),V(N1,N1),B(10),Z(10)
IF(IVEC) 10,10,20
20 DO 70 IP=1,N
DO 70 IQ=1,N
IF(IP-IQ) 50,60,50
60 V(IP,IQ)=1.0
GO TO 70
50 V(IP,IQ)=0.0
70 CONTINUE
10 DO 80 IP=1,N
D(IP)=A(IP,IP)
B(IP)=D(IP)
Z(IP)=0.0
80 CONTINUE
IROT=0.0
DO 90 I=1,50
SM=0.0
NM1=N-1
DO 100 IP=1,NM1
IPP1=IP+1
DO 100 IQ=IPP1,N
100 SM=SM+ABS(A(IP,IQ))
IF(SM) 110,120,110
110 IF(I-4) 130,140,140
130 TRESH=0.2*(SM/(N*N))
GO TO 150
140 TRESH=0.0
150 DO 160 IP=1,NM1
IPP1=IP+1
DO 160 IQ=IPP1,N
G=100*ABS(A(IP,IQ))
IF(I-4) 170,180,180
180 IF(ABS(D(IP)+G)-ABS(D(IP))) 170,190,170
190 IF(ABS(D(IQ)+G)-ABS(D(IQ))) 170,200,170
200 A(IP,IQ)=0.0
GO TO 160
170 IF(ABS(A(IP,IQ))-TRESH) 220,220,210
210 H=D(IQ)-D(IP)
IF((ABS(H)+G)-ABS(H)) 230,240,230
240 T=A(IP,IQ)/H
GO TO 250
230 THETA=0.5*H/A(IP,IQ)
T=1/(ABS(THETA)+SQRT(1+THETA*THETA))
IF(THETA) 260,250,250

```

10,5)

i)

```

260 T=-T
250 C=1/SQRT(1+T*T)
    S=T*C
    TAU=S/(1+C)
    H=T*A(IP,IQ)
    Z(IP)=Z(IP)-H
    Z(IQ)=Z(IQ)+H
    D(IP)=D(IP)-H
    D(IQ)=D(IQ)+H
    A(IP,IQ)=0.0
    IPM1=IP-1
    IF(IPM1) 275,275,265
265 DO 270 J=1,IPM1
    G=A(J,IP)
    H=A(J,IQ)
    A(J,IP)=G-S*(H+G*TAU)
    A(J,IQ)=H+S*(G-H*TAU)
270 CONTINUE
275 IQM1=IQ-1
    IF(IPM1-IQM1) 277,277,283
277 DO 280 J=IPM1,IQM1
    G=A(IP,J)
    H=A(J,IQ)
    A(IP,J)=G-S*(H+G*TAU)
    A(J,IQ)=H+S*(G-H*TAU)
280 CONTINUE
283 IQP1=IQ+1
    IF(IQP1-N) 285,285,295
285 DO 290 J=IQP1,N
    G=A(IP,J)
    H=A(IQ,J)
    A(IP,J)=G-S*(H+G*TAU)
    A(IQ,J)=H+S*(G-H*TAU)
290 CONTINUE
295 IF(IVEC) 300,300,310
310 DO 320 J=1,N
    G=V(J,IP)
    H=V(J,IQ)
    V(J,IP)=G-S*(H+G*TAU)
    V(J,IQ)=H+S*(G-H*TAU)
320 CONTINUE
300 IROT=IROT+1
220 CONTINUE
160 CONTINUE
    DO 330 IP=1,N
    B(IP)=B(IP)+Z(IP)
    D(IP)=B(IP)
    Z(IP)=0.0
330 CONTINUE
    90 CONTINUE
120 RETURN
    END

```

(3) 出力結果

NO	YK1	YK2	P	J(K)
1	1.0000	1.0000	1.0000	0.3031
2	1.1564	0.6850	0.9203	0.1642
3	1.4682	0.4388	0.7496	0.0791
4	1.7681	0.3980	0.6347	0.0591
5	1.9187	0.3843	0.5995	0.0571
6	1.9602	0.3828	0.5903	0.0571

INITIAL VALUES OF PARAMETERS

C1	C2	P
6.060	9.623	1.000

*** OPTIMIZED PARAMETERS ***

K1	K2	P
11.879	3.683	0.590

時間	降雨量	実測 流出高	計算 流出高	誤差
1	2.8430	0.0990	0.0933	0.0057
2	0.3710	0.1660	0.1333	0.0327
3	3.5850	0.2600	0.3213	-0.0613
4	4.6970	0.4280	0.6973	-0.2693
5	7.9110	1.0440	1.4383	-0.3943
6	11.2490	2.8120	2.7470	0.0650
7	12.3620	4.9350	4.5332	0.4018
8	13.8450	6.8540	6.6348	0.2192
9	3.5850	8.1910	7.7329	0.4581
10	0.8650	7.5190	7.1831	0.3359
11	0.0000	6.1500	5.7404	0.4096
12	0.0000	4.4950	4.1920	0.3030
13	0.0000	2.6690	2.9756	-0.3066
14	0.0000	1.9280	2.1625	-0.2345
15	0.0000	1.5990	1.6509	-0.0519
16	0.0000	1.4230	1.3210	0.1020
17	0.0000	1.2930	1.0931	0.1999
18	0.0000	1.1640	0.9248	0.2392
19	0.0000	1.0500	0.7946	0.2554
20	0.0000	0.9510	0.6908	0.2602
21	0.0000	0.8530	0.6062	0.2468
22	0.0000	0.7690	0.5363	0.2327
23	0.0000	0.6860	0.4777	0.2083
24	0.0000	0.6030	0.4280	0.1750
25	0.0000	0.5340	0.3856	0.1484
26	0.0000	0.4790	0.3490	0.1300
27	0.0000	0.4370	0.3173	0.1197
28	0.0000	0.3950	0.2896	0.1054
29	0.0000	0.3400	0.2653	0.0747
30	0.0000	0.2850	0.2438	0.0412