

MacCormack法を用いた常・射流計算

Practical Computations of Sub-Critical and Super-Critical Flows
with MacCormack Scheme

崇田 徳彦* 清水 康行** 渡邊 康玄***

Naruhiko MUNETA, Yasuyuki SHIMIZU and Yasuharu WATANABE

従来の不等流計算¹⁾は、常流から射流または射流から常流への跳水現象を伴う水位の計算が非常に困難であった。これを解消するための計算法のひとつに Lax-Wendroff 法²⁾があるが、この方法を用いると差分格子中間点の物理量を考える必要があり、計算手法自体もかなり複雑なものとなる。MacCormack 法³⁾も Lax-Wendroff 法と同様に、跳水現象などの不連続点を含む流れの計算法であるが、Lax-Wendroff 法と異なり格子点上だけでスキームを記述でき、境界条件などを考えるときにも格子中間点を考える必要もなく、計算法も簡単である。本研究では、現在広く使われている不等流計算法に代わり、St-Venant 方程式を基礎式とした MacCormack 差分スキームによる流れの計算法を、常射流混在流れの条件で行われた石狩川遊水地越流部模型実験⁴⁾に適用し、計算結果と実測値を比較することにより MacCormack 差分スキームによる流れの計算の有効性を明らかにした。

《不等流；急流河川；常射流；MacCormack 法》

It is very difficult to predict flow fields with hydraulic jumps using the Back-Water calculation method, which is widely used in practical engineering work. The Lax-Wendroff method is effective for this problem, however, computations are very difficult especially in the schematization. The MacCormack method is an improved version of the Lax-Wendroff method, which can also calculate flow discontinuities such as hydraulic jumps. The schematization and the calculation procedure of the MacCormack method is very simple and it is very easy to use.

This paper tests the accuracy of the MacCormack method in practical hydraulic problems, it is applied to over topping flow of levees including hydraulic jump. The calculated results are compared with experimental results and the validity of the method is demonstrated.

Keywords: non-uniform flow, rapid flow, super-critical and sub-critical flow, MacCormack scheme.

1. はじめに

従来より、急流河川の治水対策として床止工や水制工などの手法がとられているが、この場合局所的に常射流の混在する流れがしばしば発生する。床止工などの設置

に際して、あらかじめ水位、流速などを予測することは河川計画重要な課題であるが、従来の不等流計算では常流と射流の部分で計算を別々に行わなければならない、計算も煩雑なものとなり、また跳水発生部における流況をうまく表現できない。射流域を含む一次元水路の計算

*河川研究室員 **同室副室長 ***同室主任研究員

手法については渡邊などの研究⁵⁾があるが、跳水発生位置やその定量的な特性を完全に予測するモデルとはなっていない。

本文は、不連続点を含む流れの計算法のひとつである MacCormack 法を用いた1次元流れの計算法を常射流混在流れに適用し、実験結果や従来の方法と比較することによりその有効性を明らかにするものである。

2. 基礎式の誘導

流下方向に x 軸、水路横断方向に y 軸、鉛直方向に z 軸をとり、 x 軸方向の運動方程式および連続式をそれぞれ (1)式、(2)式で与える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

ただし、 t は時間、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 軸方向の流速成分、 F_x は質量力の x 方向成分、 ρ は密度、 p は圧力である。

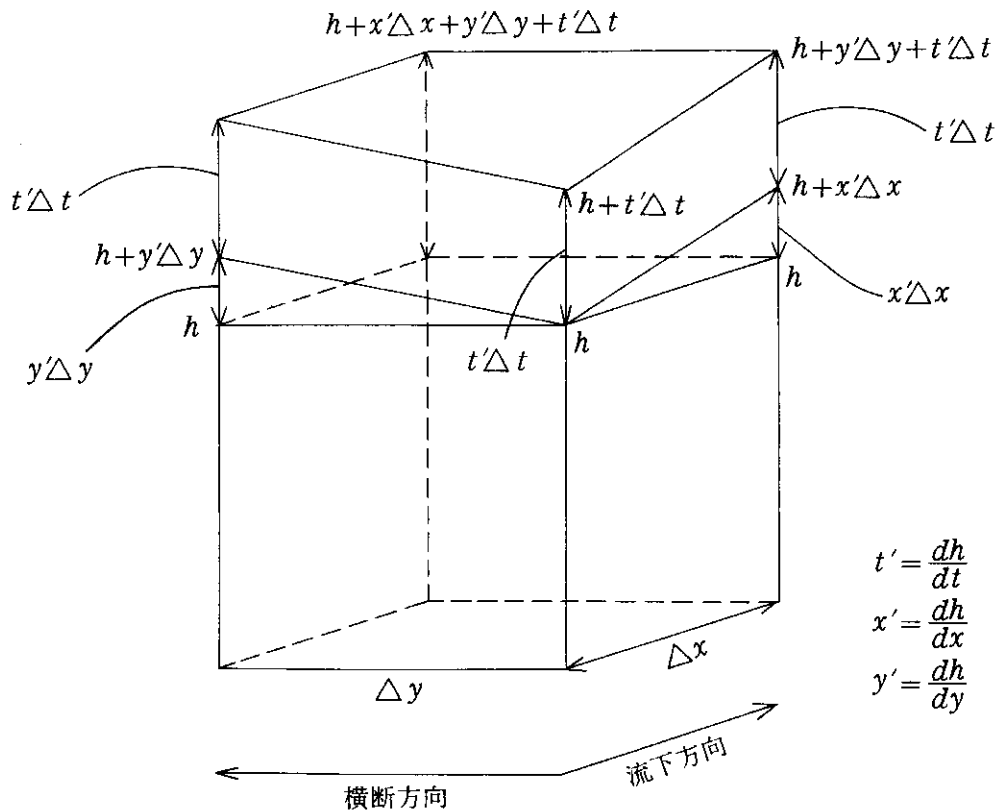


図-1 時間・空間の移動量

2.1 運動方程式

(1)式左辺の移流項を、以下のように変形する。

$$\begin{aligned} & u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (uw)}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \\ & \quad + \frac{\partial (wu)}{\partial z} - u \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (uw)}{\partial y} + \frac{\partial (wu)}{\partial z} \\ & \quad - u \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式に(2)式の関係を用いると、(5)式が得られる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= 2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (wv)}{\partial z} \quad (5)$$

(5)式を(1)式に代入し、

$$2u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (u^2)}{\partial x} \quad (6)$$

の関係をを用いると、(7)式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (wu)}{\partial z} \\ &= Fx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式の各項を、水深方向と横断方向に積分を行う。

$$\begin{aligned} & \int_0^B \int_0^h \frac{\partial u}{\partial t} dz dy + \int_0^B \int_0^h \frac{\partial (u^2)}{\partial x} dz dy \\ &+ \int_0^B \int_0^h \frac{\partial (uv)}{\partial y} dz dy + \int_0^B \int_0^h \frac{\partial (wu)}{\partial z} dz dy \\ &= \int_0^B \int_0^h Fx dz dy - \int_0^B \int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho g z}{\partial x} dz dy \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 p は静水圧分布を仮定し $\rho g z$ に置き換えてあり
(g は重力加速度)、 B は川幅である。
なお、ここで図-1に示すように、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u dz \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_0^{h+\Delta t} u(t+\Delta t) dz - \int_0^h u(t) dz}{\Delta t} \end{aligned} \quad (9)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_0^h u(t+\Delta t) dz - \int_0^h u(t) dz + \int_h^{h+\Delta t} u(t+\Delta t) dz}{\Delta t} \quad (10)$$

$$= \int_0^h \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{u_{z=h} t' \Delta t}{\Delta t} \quad (11)$$

である。したがって、

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u dz - u_{z=h} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (12)$$

となる。

また、

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dz$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{h-x+\Delta x} u^2(x+\Delta x) dz - \int_0^h u^2(x) dz}{\Delta x} \quad (13)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_0^h u^2(x+\Delta x) dz - \int_0^h u^2(x) dz + \int_h^{h+x\Delta x} u^2(x+\Delta x) dz}{\Delta x} \quad (14)$$

$$= \int_0^h \frac{\partial (u^2)}{\partial x} dz + \frac{u_{z=h}^2 x' \Delta x}{\Delta x} \quad (15)$$

の関係より、

$$\int_0^h \frac{\partial (u^2)}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dz - u_{z=h}^2 x' \quad (16)$$

$$= \frac{\partial (u^2 h)}{\partial x} - u_{z=h}^2 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (17)$$

となる。

以上の関係をを用いると、(8)式は(18)式で示される。

$$\begin{aligned} & \int_0^B \left[\frac{\partial (uh)}{\partial t} - u_{z=h} \frac{\partial h}{\partial t} \right] dy \\ &+ \int_0^B \left[\frac{\partial (u^2 h)}{\partial x} - u_{z=h}^2 \frac{\partial h}{\partial x} \right] dy \\ &+ \int_0^B \int_0^h \frac{\partial (uv)}{\partial y} dz dy + \int_0^B \int_0^h \frac{\partial (wu)}{\partial z} dz dy \\ &= \int_0^B \int_0^h Fx dz dy - \int_0^B \int_0^h g \frac{\partial z}{\partial x} dz dy \end{aligned} \quad (18)$$

これを整理すると、(19)式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (Buh)}{\partial t} - u_{z=h} \frac{\partial (Bh)}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial (Bu^2 h)}{\partial x} - u_{z=h}^2 \frac{\partial (Bh)}{\partial x} \\ &+ \int_0^B [uw|_{y=B} - uw|_{y=0}] dz \\ &+ \int_0^B [wu|_{z=h} - wu|_{z=0}] dy \\ &= \int_0^B \int_0^h Fx dz dy - \int_0^B \frac{1}{2} g \frac{\partial h^2}{\partial x} dy \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、側壁($y = B, 0$)においては $v = 0$ であるから、
 $wu|_{y=B} = wu|_{y=0} = 0$ 河床($Z = 0$)においては $w = 0$ であるから $wu|_{z=0} = 0$ となり、(19)式は(20)式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (Buh)}{\partial t} - u_{z=h} \frac{\partial (Bh)}{\partial t} \\ & + \frac{\partial (Bu^2h)}{\partial x} - u_{z=h}^2 \frac{\partial (Bh)}{\partial x} + Bu_{z=h}W \\ & = \int_0^B \int_0^h F_x dz dy - \frac{B}{2} g \frac{\partial h^2}{\partial x} \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、 W は Z 軸方向の表面流速であり、(21)式で示される。

$$W = \frac{\partial h}{\partial t} + u_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (21)$$

また、(20)式中の F_x (質量力) の成分としては、重力、河床せん断力およびレイノルズストレス (乱流拡散によるせん断力) のそれぞれ x 方向成分があげられるが、これらを次式で表わす。

$$\begin{aligned} & \int_0^B \int_0^h F_x dz dy \\ & = BgS_0h - \frac{B}{\rho} \tau_b + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

ただし、 S_0 は水路床勾配 ($= -\frac{\partial z}{\partial x}$, z は河床高), τ_b は河床せん断力, ε は乱流粘性係数である。

河床せん断力 τ_b をマニング型の抵抗則を用いて表わすと、次式となる。

$$\tau_b = \rho gh S_f = \rho gh \frac{n^2 u^2}{h^{1/3}} = \rho g \frac{n^2 u^2}{h^{1/3}} \quad (23)$$

ただし、 S_f は摩擦勾配 (エネルギー勾配), n はマニングの粗度係数である。

(23)式を(22)式に代入すると、(24)式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_0^B \int_0^h F_x dz dy \\ & = BgS_0h - Bg \frac{n^2 u^2}{h^{1/3}} + B \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial (uh)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

(21)式および(24)式の間係を(20)式に用いると、(25)式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial (u^2h)}{\partial x} \\ & - u_{z=h} \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + u_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} - \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = gS_0h - g \frac{n^2 u^2}{h^{1/3}} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial (uh)}{\partial x} \right) \\ & - \frac{1}{2} g \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \quad (25)$$

これを整理すると、(26)式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial (u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial (\frac{1}{2}gh)}{\partial x} \\ & = gh \left(S_0 - \frac{n^2 u^2}{h^{1/3}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial (uh)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

2.2 連続式

(2)式を水深方向と横断方向に積分すると、(27)式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_0^B \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz dy + \int_0^B \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y} dz dy \\ & + \int_0^B \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz dy = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 $\square-1$ に示すように、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz \\ & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_h^{h+\Delta x} u(x+\Delta x) dz - \int_0^h u(x) dz}{\Delta x} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_0^h u(x+\Delta x) dz - \int_0^h u(x) dz + \int_h^{h+\Delta x} u(x+\Delta x) dz}{\Delta x} \end{aligned} \quad (29)$$

$$= \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz + \frac{u_{z=h} x' \Delta x}{\Delta x} \quad (30)$$

であるので、

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz - u_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (31)$$

となり、(31)式を(27)式に代入すると(32)式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (Buh)}{\partial x} - u_{z=h} \frac{\partial (Bh)}{\partial x} \\ & + \int_0^B [v|_{y=B} - v|_{y=0}] dz + \\ & \int_0^B [w|_{z=h} - w|_{z=0}] dy = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、側壁 ($y = B, 0$) においては $v = 0$ であり、
 $v|_{y=B} = v|_{y=0} = 0$, 河床 ($z = 0$) で $w = 0$ であるから
 $w|_{z=0} = 0$ となり、(32)式は(33)式となる。

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x} - u_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + W = 0 \quad (33)$$

これに(21)式の関係を用いると、

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x} - u_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + u_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

となり、最終的に連続式は(35)式となる。

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (35)$$

2.3 St-Venant 対程式

(26)式および(35)式を以下の式で置き換えると、St-Venant
の運動量保存則と質量保存則が導かれる。

$$\begin{aligned} H &= h \\ U &= uh \\ F &= u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ S &= gh(S_o - S_f) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial(uh)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

<運動量保存則>

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \quad (37)$$

<質量保存則>

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (38)$$

3. MacCormack 差分スキーム

MacCormack 法³⁾は時間依存差分法の一つで、空間お
よび時間方向に2次の精度を有する差分スキームであり、
(39)式で一度計算したものを、さらに(40)式で補正すること
により、計算精度の向上をはかるものである。

(予測子段階)

$$\bar{U} = U_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_i - E_{i-1}) + \Delta t S_i \quad (39)$$

(修正予測子段階)

$$U_i = \frac{1}{2} \left\{ U_i + \bar{U}_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{E}_{i+1} - \bar{E}_i) + \Delta t S_i \right\} \quad (40)$$

ただし、

$$U = \begin{pmatrix} H \\ U \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} U \\ F \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} O \end{pmatrix} \quad (41)$$

ここで、(39)式、(40)式において i は x 方向の格子点番号で
あり、 Δt は計算時間刻み幅、 Δx は x 軸方向の計算距
離刻み幅、 \bar{U} 、 \bar{E} は予測子段階の U 、 E の値である。

Δt の算出法は C.F.L 条件である(42)式で行い、各時間
および空間上の最小の Δt を全計算点で用いて計算を行う
ものとする。

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u + \sqrt{gh} + 2\frac{\epsilon}{\Delta x}} \quad (42)$$

乱流粘性係数 ϵ は、一定値 1×10^{-3} を用いることとし
た。また、計算の不安定化を防ぐ方法である人工粘性を
用いることにしたが、人工粘性にはさまざまな形があり
一概には決められない。ここでは、比較的簡単な以下諸
式を用いることとした。

<水深>

$$V = \frac{|h(i+1) - 2h(i) + h(i-1)|}{h(i+1) + 2h(i) + h(i-1)}$$

<水位>

$$V = \frac{|h(i+1) + z(i+1) - 2\{h(i) + z(i)\} + h(i-1) + z(i-1)|}{h(i+1) + z(i+1) + 2\{h(i) + z(i)\} + h(i-1) + z(i-1)}$$

$$r = k \max \{V(i-1), V(i)\} \quad (43)$$

ただし、 k は人工粘性係数である。

人工粘性は計算上、格子点と格子点前後での水深 (水
位) 差を滑らかにするものであり、急激な流況変化のあ
る計算には有効な手法である。

また、人工粘性は水深を考慮した粘性と水位を考慮し
た粘性が考えられるが、河床高の変化が小さい場合 (水
深の変化が小さい場合) は水深、河床高の変化が大きい
場合 (水深の変化が小さい場合) は水位を用いると精度
のよい結果が得られる。

4. 計 算 法

4.1 計算格子点の配置法

計算格子点の配置を、図-2に示す。

ただし、 i は流下方向の格子点であり、上流から下流方
向に向かって増加する。後進差分での断面間距離 $\Delta x(i)$
は $x(i) - x(i-1)$ であり、前進差分での断面間距離
 $\Delta x(i)$ は $x(i+1) - x(i)$ である。

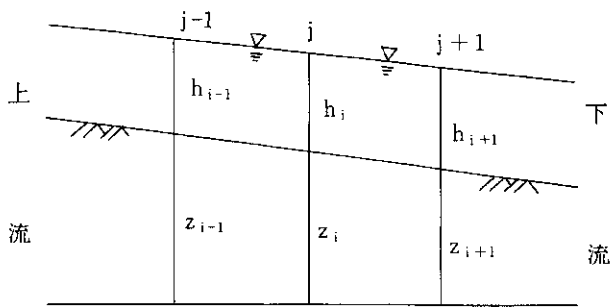


図-2 計算差分格子

4.2 初期条件

MacCormack 法は既往の不等流計算と異なり、初期条件としてすべての点に水深をもたせておかなければならない。参考までに、今回計算を行った2ケースの初期水深を図-3、4に示す。また、既往の不等流計算と同様に下流端水深 $h(imax)$ を固定し、一定流量 $Q(m^3/s)$ を与え、全点において流速 $u(i) = \frac{Q}{h(i)}$ を初期条件として与える。

4.3 境界条件

(1) 上流端の境界条件

上流端では、 $u = \frac{Q}{h}, \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ を境界条件とする。つまり、格子点 $i=1$ のときの $h(1)$ および $u(1)$ は、それぞれ $h(1) = h(2)$ および $u(1) = u(2)$ とする。

(2) 下流端の境界条件

下流端では、 $\frac{\partial h}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ を境界条件とする。つまり、格子点 $i=imax+1$ のときの $h(imax+1)$ および $u(imax+1)$ は、それぞれ $h(imax+1) = h(imax)$ および $u(imax+1) = u(imax)$ とする。

4.4 計算手順

計算手順を、図-5のフローチャートに示す。

(1) 予測子の計算

予測子段階では後進差分で、上流から下流に向かって計算を行う。(44)式で $\bar{h}(i)$, $\overline{uh}(i)$, $\overline{u}(i)$ を求める。ただし、 $\bar{h}(i)$, $\overline{uh}(i)$, $\overline{u}(i)$ はそれぞれ予測段階での $h(i)$, $uh(i)$, $u(i)$ である。

$$F(i) = u(i)^2 h(i) + \frac{1}{2} gh(i)$$

$$S(i) = \varepsilon \frac{uh(i-1) - 2uh(i) + uh(i+1)}{\Delta x^2} + gh(i)(S_o - S_f) \quad (44)$$

$$\bar{h}(i) = h(i) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{uh(i) - uh(i-1)\}$$

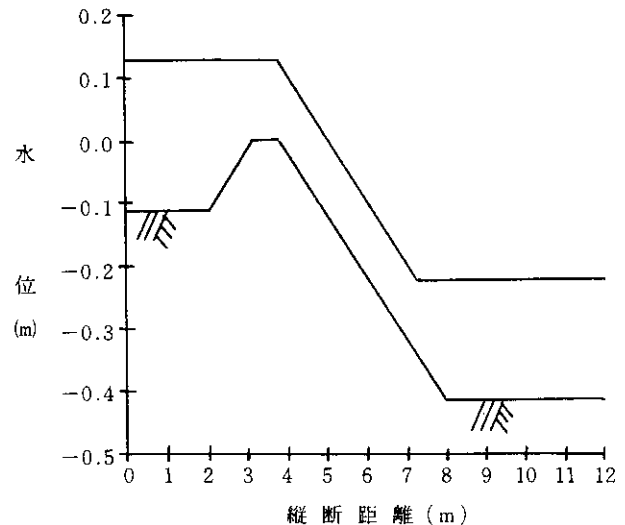


図-3 初期水位条件

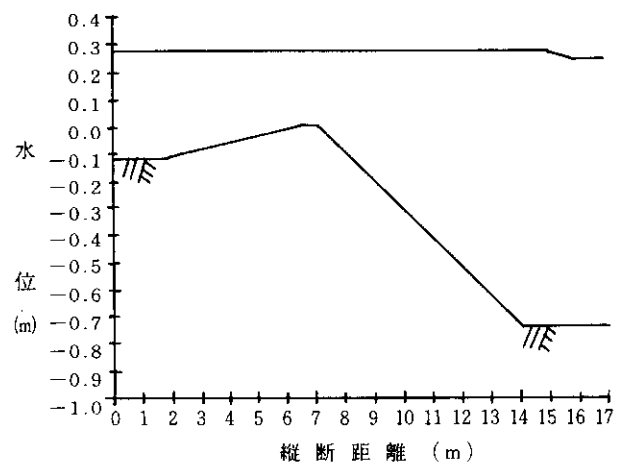


図-4 初期水位条件

$$\overline{uh}(i) = uh(i) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{uh(i) - uh(i-1)\} \overline{u}(i)$$

$$\overline{u}(i) = \frac{\overline{uh}(i)}{\bar{h}(i)}$$

(2) 修正測子の計算

修正測子段階では予測子段階で求めた値を(45)式により、前進差分で下流から上流に向かって計算を行う。

$$F(i) = \bar{h}(i) \left(\overline{u}(i)^2 + \frac{1}{2} g \bar{h}(i) \right)$$

$$S(i) = \varepsilon \frac{\overline{uh}(i+1) - 2\overline{uh}(i) + \overline{uh}(i-1)}{\Delta x^2} + g \bar{h}(i) (S_o - S_f)$$

$$h(i) = \frac{\{(\bar{h}(i) + \overline{h}(i)) - (uh(i+1) - uh(i)) \frac{\Delta t}{\Delta x}\}}{2} \quad (45)$$

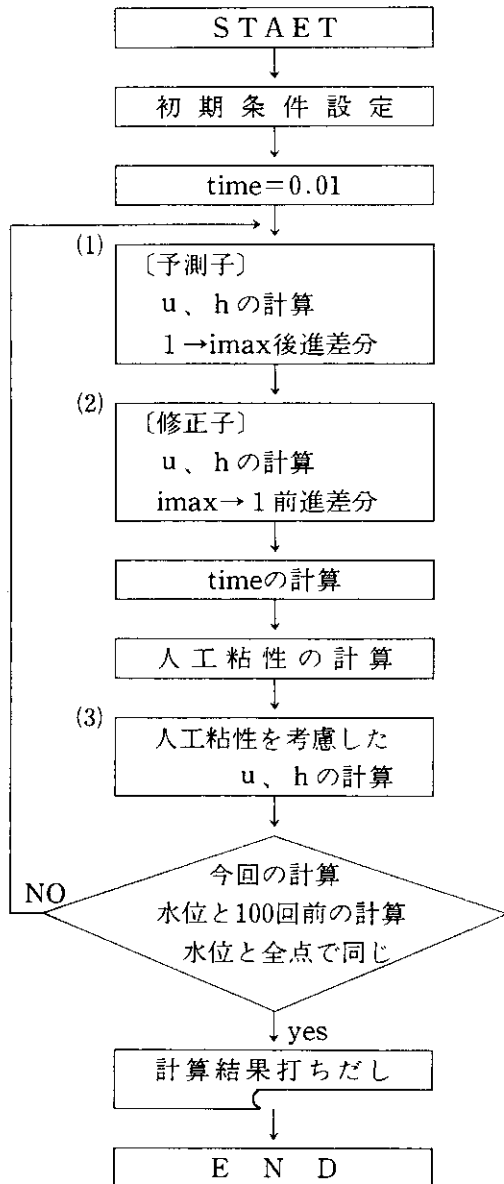


図-5 計算の流れ

$$uh(i) = \frac{\{uh(i) + \overline{uh(i)}\} - (F(i+1) - F(i)) \frac{\Delta t}{\Delta x} + \Delta t S(i)}{2}$$

$$u(i) = \frac{uh(i)}{u(i)}$$

(3) 人工粘性のとり入れ方

この段階で人工粘性を考慮した $h(i), uh(i)$ に置き換える。つまり、 $h(i), uh(i)$ をそれぞれ(46)式、(47)式で計算しなおす。

$$h(i) = h(i) + r(i+1)\{h(i+1) - h(i)\} - r(i)\{h(i) - h(i-1)\} \quad (46)$$

$$uh(i) = uh(i) + r(i+1)\{uh(i+1) - uh(i)\} - r(i)\{uh(i) - uh(i-1)\} \quad (47)$$

以上の(1)~(3)の計算を繰返し行う。

4.5 計算の打ち切り条件

本節による計算法は、時間的変動を考慮した非定常の計算手法であるために、計算の打ち切り条件を取込まなければならない。そこで、今回行った方法は100回前に行った計算値と現在の計算値が全点において差が1 mm以下になったときを定常と判断し、計算を打切ることとした。

5. 適用性の検討

5.1 実験条件

再現計算に用いた2ケースの実験条件について、表-1に示す。

表-1 実験条件

ケース	流量 Q (m³/s)	下流端 水深 (m)	粗度係数
完全越流 (実験①)	0.07971	0.1949	0.01
もぐりせき (実験②)	0.24310	0.9871	0.01

なお、粗度係数はアクリル板水槽であることから0.01とした。実験①の模型は幅1 mの直線水路にのり勾配1:10のマウンドを設けたものであり、実験②の模型はのり包配1:40.2, 1:10のマウンドを設けたものである。

5.2 人工粘性係数の与え方と計算結果

(1) 完全越流

計算手法としては、人工粘性係数 k を最初0として計算を行い、はさみ打ち法で適切な人工粘性を求める方法をとった。実験①について、図-6の $k=0.1$ のとき、跳水上部で実際よりも跳上りが顕著であり人工粘性係数 k が小さすぎると判断される。人工粘性係数 $k=3$ を与えたところ図-7に見られるように、跳水の始まりの部分が実際よりも滑らかになりすぎるので、人工粘性係数 k は $0.1 < k < 3$ の間に妥当な値があると判断される。

図-8に、人工粘性係数 $k=1$ とした場合の計算結果を示す。

(2) もぐり越流

計算手法としては、完全越流と同様にはさみ打ち法で適切な人工粘性を求めた。実験②について、図-9の人工粘性係数 $k=0.05$ ではもぐり下流部で振動しており、人工粘性係数 k が小さすぎる。また、図-10の人工粘性係数 $k=1.0$ では、もぐり下流部で異常なもり上がりを示

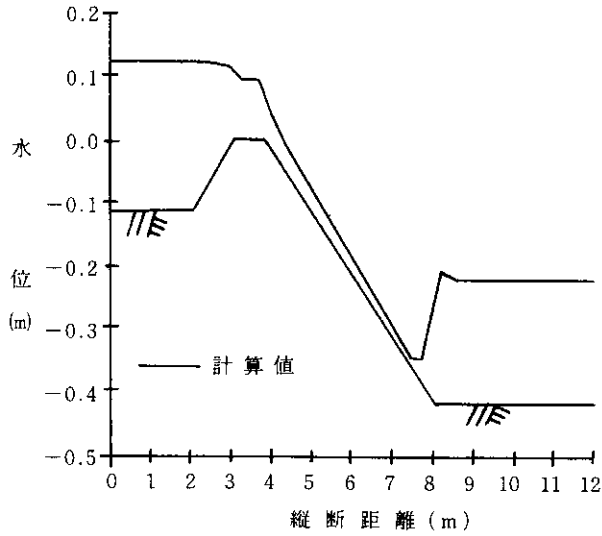


図-6 人工粘性係数 $k = 0.1$

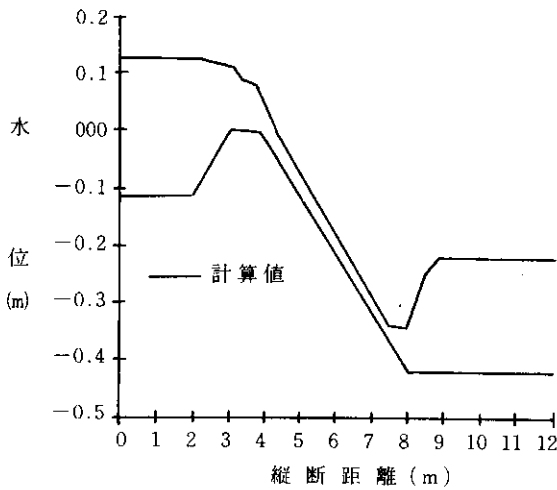


図-7 人工粘性係数 $k = 3$ 縦断距離 (m)

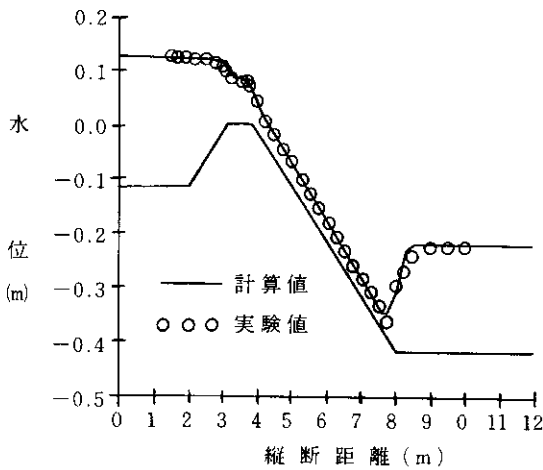


図-8 人工粘性係数 $k = 1$

しており、全体的にも粘性がききすぎている。したがって、人工粘性係数 k は $0.05 < k < 1$ の間が適当であると判断される。図-11に、人工粘性係数 $k = 0.1$ の場合を示す。

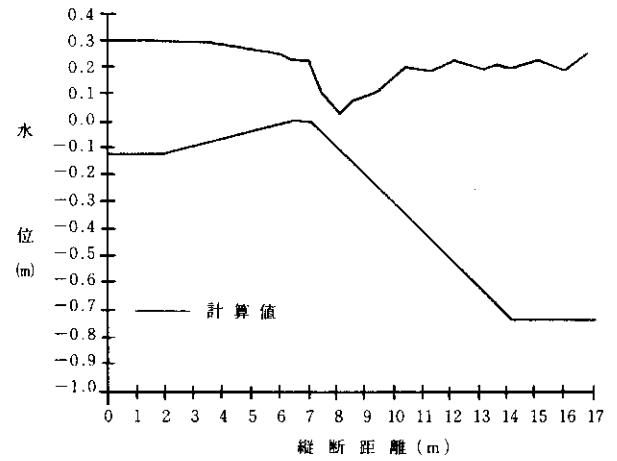


図-9 人工粘性係数 $k = 0.05$

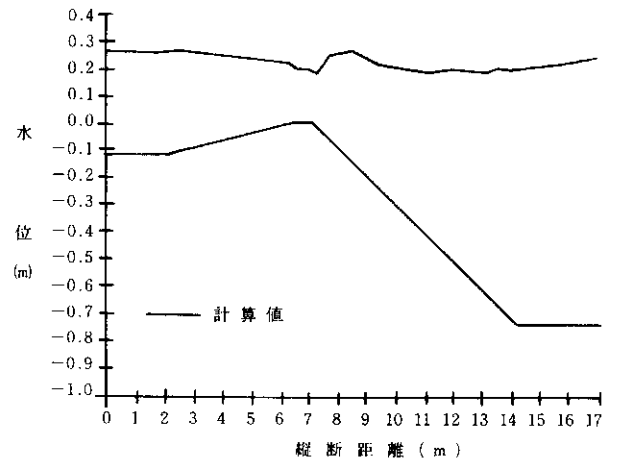


図-10 人工粘性係数 $k = 1.0$

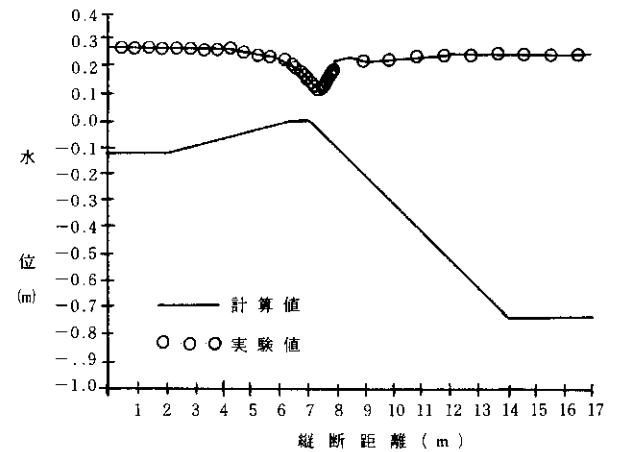


図-11 人工粘性係数 $k = 0.1$

5.3 既復の方法との比較

常射流混在流の1次元不等流計算の手法には、本節の手法以外にも Lax-Wendroff 法を用いた渡邊の方法⁹⁾がある。そこで、既往の方法による計算結果との比較を行った。なお、Lax-Wendroff 法については、不等流の式をそのまま差分して解く方法⁹⁾ (非保存形) が提案されているが、常射流混在流を計算する場合保存形を用いる必要があるため、今回の検討においては、不等流式⁹⁾を(48)式で示す保存形に書きなおして差分する方法 (保存形) についても計算を行うこととした。

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (u^2)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho h} \quad (48)$$

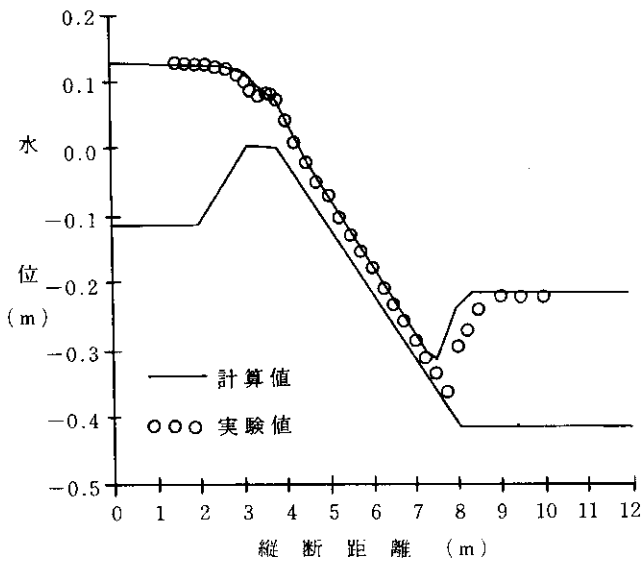


図-12 Lax-Wendroff法 (非保存形)

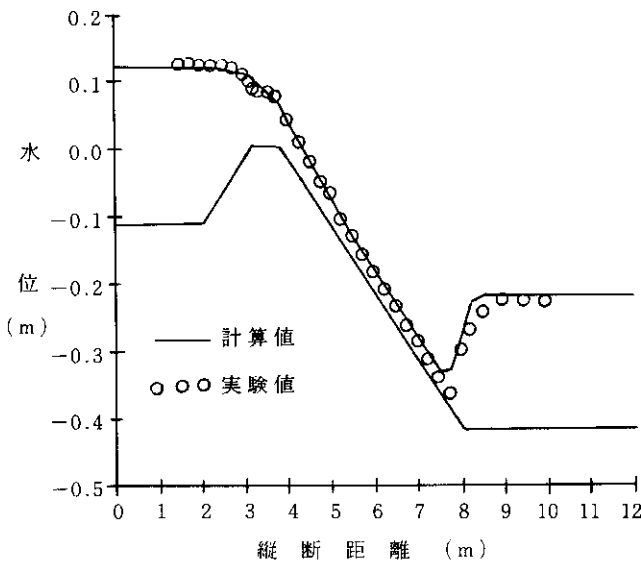


図-13 Lax-Wendroff法 (保存形)

図-12, 13は実験①を非保存形, 保存形を用い再現したものであり、図-14, 15は実験②を非保存形, 保存形を用い再現したものである。非保存形の Lax-Wendroff 法では、完全越流の再現において跳水の位置が実験値よりも上流に算出されていたが、保存形になおすことにより、跳水の位置が実験値により近づく結果となった。しかし、潜り越流の再現においては、保存形になおすことにより跳水の発生位置が下流にずれた計算結果となり、完全跳水の場合とは逆に非保存形の方が再現性のよい結果となった。このように、Lax-Wendroff 法を用いた不等流計算は、MacCormack 法に近い精度で実験値を再現することは可能であるが、本来保存形で解く必要のある跳水を含む流れにおいて、保存形よりも非保存形の方が再現性がよくなってしまいう結果となっている。一方、MacCormack 法による再現結果は、完全跳水の場合人工粘性の値いかんに関わらず高精度で実験値を再現して

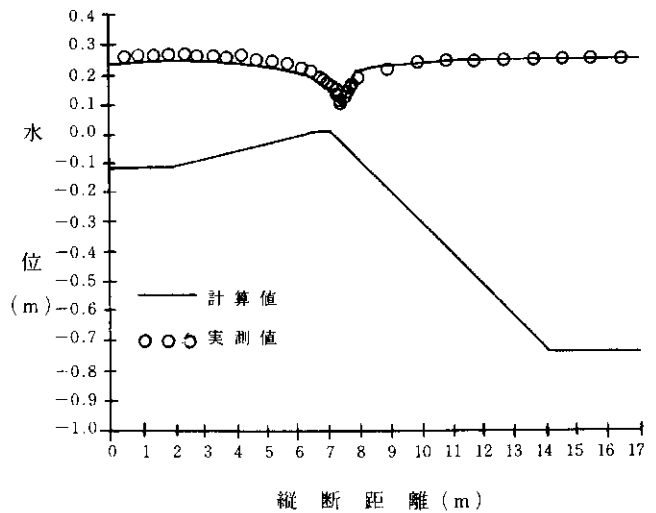


図-14 Lax-Wendroff法 (非保存形)

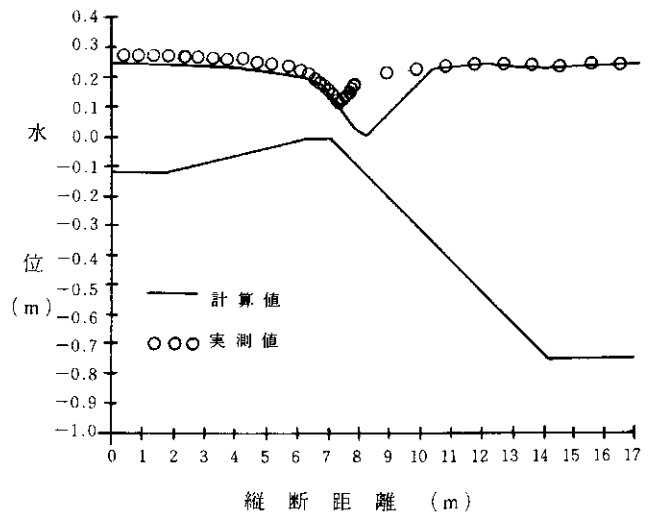


図-15 Lax-Wendroff法 (保存形)

おり、潜り越流の場合においても、人工粘性係数が小さいと保存形 Lax-Wendroff 法と同様の傾向を示すが、人工粘性係数をある程度大きくすることにより、実験値をより精度よく再現することができる。このように、人工粘性を考慮することにより完全越流、潜り越流の別なく流れを精度よく再現することが可能となった。また、今回の計算例は定常流であるが、本手法は非定常流を扱っており、非定常流を計算する場合においても十分適用可能な手法となっている。

6. おわりに

今回の検討により、跳水現象を伴う流れがこれまでの手法に比べて、より高精度で再現可能であることが示された。現在のところ、人工粘性係数の与え方は試行により決められているが、今後はより合理的な方法を検討していきたい。また、跳水を含む流れを再現できたことから、このような流れの場における河床変動計算への適用を目指したい。

本研究を進めるにあたり、計算手法、基礎式の誘導な

どで、北海道大学工学部土木工学科 森 明巨先生に御指導いただいた。ここに、記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 椿 東一郎；水理学 I 基礎土木工学全書 6，森北出版，1973年。
- 2) ㈱日本機械学会編；流れの数値シミュレーション，コロナ社，1988年。
- 3) Garcia, R. and Kahawita, R.: Numerical solution of the St. Venant equations with the MacCormack finite-difference scheme : International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol16, 1986.
- 4) 開発土木研究所；石狩川遊水地越流部模型実験業務報告書，1989年。
- 5) 渡邊康玄，許士達広，村上泰啓，崇田徳彦；常流・射流混在場での不等流計算と河床変動計算，開発土木研究所月報No.436，1989年9月。

*

*

*