

高流速条件下で発生する 三角波の再現に関する研究

寒地土木研究所 寒地河川チーム ○岩崎 理樹
井上 卓也
矢部 浩規

急流河川では出水時に生じる高速流によって、河道内に三角波が発生することがある。近年の研究から、この三角波が河川構造物の安定性を低下させる要因になり得ることがわかってきた。三角波に強い河川構造物を設計する際には、三角波がどこで発生し、どのような流速を生じさせるかを予測する必要がある。本研究では、従来河川の数値解析に用いられてきた平面二次元モデルを改良し、三角波を数値的に再現することを試みる。

キーワード：高流速、三角波、交互砂州、反砂堆、数値計算

1. はじめに

急流河川など、洪水時に流れが高速流となりやすい河川では、しばしば三角波と呼ばれる波高の高い水面波が観測されることがある¹⁾。この三角波は、従来、橋脚や護岸等の河川構造物の安定低下や、越流、堤防侵食の要因となり得ることが懸念されていたが、その具体的な影響については現地観測等が困難であることから明確ではなかった。著者ら²⁾は、そのような観点から三角波が河川管理上どのようなリスクを持ち得るかについて、護床工を模したブロック模型を用いて室内水理実験を行った。その結果、三角波が発生すると、護床工などのブロック構造物の安定性が有意に低下し、従来護岸設計等に用いられる基準³⁾は必ずしも十分でないことが示唆された。これは三角波の持つリスクの一つを実験的に示したに過ぎないが、実際には上述したような橋脚被災や堤防侵食などの河川管理上のリスクになり得ることは十分に予想される。従って、三角波発生時のリスクを低減するためには、三角波がいつどこでどのように発生するか、すなわち、三角波の発生条件や発生した際の流速などの水理量を把握することが重要である。

河川における三角波の発生原因にはいくつかの説明がなされているが⁴⁾、その中でも大きな要因と考えられるのが、河床に形成される反砂堆である。河床に形成された反砂堆と水面とが相互に変動し、三角波のような巨大な波の形成を引き起こしていると考えられる。井上ら⁵⁾は、そのような観点から、幅広い条件における室内移動床実験を行い、三角波と反砂堆の形成条件を整理している。その結果によれば、三角波はフルード数が1以上の条件で発生しやすいが1.7程度とあまり大きくなると発生しづらいこと、また、フルード数が適当な条件に合っ

ても、無次元掃流力が小さい場合は形成されづらいことを示している。また、交互砂州が同時に形成されるような条件では、三角波の発生位置は、砂州の瀬に偏り、河岸近くでも発生することを示している。このような室内実験は、三角波の発生条件を明らかにする上で重要であるが、発生した三角波がどのようなものかを説明するには、さらに詳細な検討が必要だろう。

そこで本研究では、三角波が発生した際のより詳細な情報を得ることを最終目標として、三角波を再現できる数値計算モデルを構築することを試みる。三角波の発生要因である反砂堆は、一般的に河川の流れ-河床変動解析に用いられる数値計算モデル（浅水流モデルと平衡流砂量モデルの組み合わせ）では再現できないことが知られている。一方で、これを再現するにはより高度なモデルが必要となるが、平面二次元の流れと河床変動を解析するモデルとはなっていない⁶⁾。本論文では、河川流と河床変動を二次元的に取り扱いやすい枠組みで、反砂堆と三角波を計算するモデルについて紹介し、その性能について実験結果との比較を通じて議論を行う。

2. 数値計算モデル

本研究で採用している数値計算モデルは、流れの水深積分モデルである平面二次元ブシネスク方程式⁷⁾と、掃流砂運動の非平衡性を考慮したオイラー型の非平衡掃流砂モデル⁸⁾を組み合わせたものである。本モデルにおいては、掃流砂の非平衡性が遡上反砂堆の不安定性に寄与し、ブシネスクモデルに含まれる非静水圧の影響は浅水流モデルで表現できない河床波上の水面形の再現性を向上させる。以下、モデルの基礎式等について記述するが、必要に応じて参考文献を参照されたい。

(1) 支配方程式

本研究で採用した平面二次元ブシネスク方程式は以下の様である。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} + \frac{\partial hV}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \\ = -g \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{\tau_x}{\rho h} + \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \\ = -g \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{\tau_y}{\rho h} + \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \phi = - \int_{\eta}^H \frac{p'}{\rho} dz = h^3 \left(B + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t} \right) \\ + \frac{h^3}{3} \left[U \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) + V \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \right] \\ - \frac{h^2}{2} \left(U^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2UV \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + V^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \\ + \frac{h^3}{3} Bg \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 t : 時間、 x, y, z : 流下、横断、鉛直方向軸、 U, V : x, y 方向の水深平均流速、 h : 水深、 η : 河床高、 g : 重力加速度、 H : 水位、 p' : 静水圧からの変動圧力、 ρ : 水の密度、 τ_x, τ_y : x, y 方向の河床せん断力、 B : ブシネスクモデルの線形分散関係を修正する係数であり、ここでは $B=1/15$ とした¹⁰⁾。河床せん断力については、

$$\tau = \rho C_f (u_b^2 + v_b^2) \quad (5)$$

とし、底面流速 u_b, v_b については、ブシネスクモデルを導入する際に仮定した水平流速の鉛直分布形より以下の様に求める。

$$\begin{aligned} u_b = U + \left(U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ - \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial \eta}{\partial x} + V \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] h \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} v_b = V + \left(U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{6} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ - \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{\partial \eta}{\partial x} + V \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] h \end{aligned} \quad (7)$$

河床せん断力に対する流れの加速・減速の影響は河床波の発達について本質的な役割を果たすが、著者ら¹¹⁾の検討に用いた Nakagawa and Tsujimoto¹²⁾ による一次元的な提案式を二次元にそのまま援用することには議論が必要なことと、数値計算上の取り扱いが難しいこともあり、ここでは省略している。

河床変動は以下の土砂連続式より計算される。

$$(1 - \lambda) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{by}}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

ここに、 λ : 河床空隙率、 q_{bx}, q_{by} : x, y 方向掃流砂量である。掃流砂ベクトルについては、掃流砂の非平衡性を考慮した内田・福岡⁹⁾ による非平衡流砂モデルを参考に以下の基礎式を用いる。

$$\frac{\partial q_{bx}}{\partial t} + \frac{\partial u_{px} q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{py} q_{bx}}{\partial y} = \frac{u_{pxe} q_{be} - u_{px} q_b}{l_s} \quad (9)$$

$$\frac{\partial q_{by}}{\partial t} + \frac{\partial u_{px} q_{by}}{\partial x} + \frac{\partial u_{py} q_{by}}{\partial y} = \frac{u_{pye} q_{be} - u_{py} q_b}{l_s} \quad (10)$$

ここに、 q_b : 掃流砂量、 q_{be} : 平衡掃流砂量、 u_{px}, u_{py} : x, y 方向の砂粒子速度、 u_{pxe}, u_{pye} : 平衡状態における x, y 方向の砂粒子速度、 l_s : step length である。砂粒子速度は、掃流砂量を交換層厚で除した平均的な移動速度として扱い、平衡状態の掃流砂量については、平衡流砂量式と横断方向流砂量式を組み合わせる。詳細は既報¹¹⁾ を参照されたい。

(2) 数値計算法

上記の支配方程式をスタッカード格子上で離散化し、数値計算を行う。流れの方程式については、Jang and Shimizu¹³⁾ を参考に運動方程式を移流項と非移流項を分離し、連続式と非移流項のみを含む運動方程式を連立させて水深について陰的に計算する。また、移流項については三次風上差分により計算を行う。運動方程式に表れる非静水圧項、すなわち分散項については、鴨原・藤間¹⁴⁾ を参考に以下の様に取り扱う。具体的には、まず運動方程式を、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + f_x = \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + f_y = \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (11)$$

とおく。ここで、 f_x, f_y : 分散項以外の項である。これらを式(4)に代入すれば、 ϕ に関する以下のポアソン方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
\phi = & h^3 \left(B + \frac{1}{3} \right) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] \\
& + \frac{h^3}{3} \left[U \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) + V \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \right] \\
& - \frac{h^2}{2} \left(U^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2UV \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + V^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \quad (12) \\
& + \frac{h^3}{3} Bg \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) \\
& - h^3 \left(B + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

このポアソン方程式を解くことにより、非静水圧分の圧力場が求まり、これから分散項が計算出来る。通常、ブシネスクモデルは分散項に非定常項が含まれるため、時間に対して陰的に解かなければならない上に、三階の空間微分項があるために離散化が難しい。一方この方法は、時間に対する繰り返し計算を非静水圧 ϕ に対する空間のポアソン方程式に置き換えているため、収束方法や計算法が明確となり、かつ式(12)の空間微分階数が最大で2に留まるので離散化も行いやすいという大きな利点がある。

3. 結果と考察

(1) 数値計算結果

前章に示した計算モデルの性能を把握するために、モデルを三角波に関する井上ら⁹⁾の室内実験に適用した。彼らは、勾配、流量、水路幅、河床材料粒径などを変化させることで、様々な条件における三角波形成の有無について調べており、水路横断方向にいくつかの列となって発生する三角波や、砂州が形成された河床における三角波の発生といった現象が報告されている。ここでは、非砂州、砂州条件となる二つの実験ケース（井上らにおけるRun1とRun3）にモデルを適用する。ここでは便宜上、それぞれをCase 1、Case 2とする。これらのケースでは、図-1に示す様な三角波が形成されるとともに、河床波も形成されていることがわかる。

具体的な水理条件はCase 1が初期水路勾配0.008、流量15.2 l/sであり、Case 2ではそれぞれ0.0145、8.1 l/sである。両ケースに共通の条件として、水路長は20 m、水路幅を0.5 mとし、格子幅を両方向ともに2 cmとしている。境界条件としては、上流端から定常流量を与え、下流端は自由流出とするが、上下流端からそれぞれ2 mの区間は計算の安定性を考慮して固定床と設定している。また、粒径は1.42 mmとし、step lengthは粒径の100倍とし、交換層厚は粒径の2倍としている。

Case 1、2における水面形と河床の計算結果をそれぞれ図-2、3に示す。非砂州条件であるCase 1では、計算初



図-1 Case 1、2の水理条件で発生した三角波⁹⁾。a) Case 1実験開始5分後、b) Case 2実験開始5分後、c) Case 2実験開始30分後。

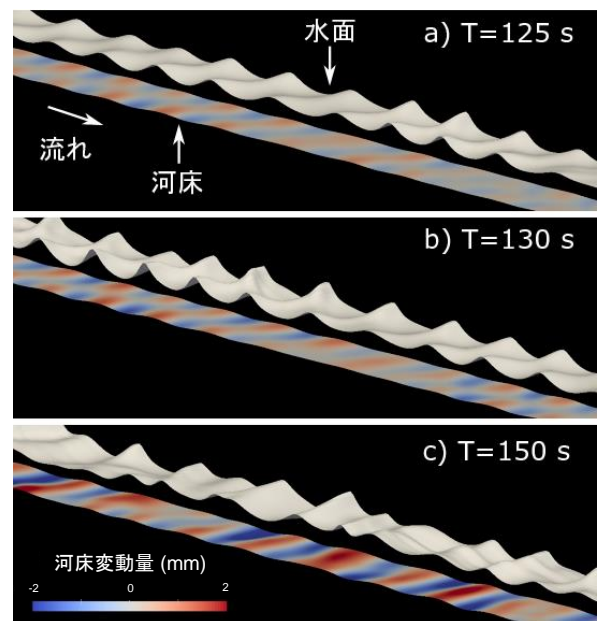


図-2 Case 1の計算結果。

期にまず交互砂州上の河床波が表れていることがわかるが(図-2a)、これはいわゆる交互砂州よりも波長はかなり短く上流に移動しており、三次元的な遡上反砂堆である。この反砂堆が発達するにつれて水面は大きく変形し、極めて急峻な水面波が発達していることがわかる(図-2b)。この水面波は従来急流河川に見られる三角波に対応していると考えられ、本モデルにより三角波の再現が可能であることが示唆される。この段階に達すると、河床波の形状は二次元的な形状に変化すると同時に、消滅と発達

を繰り返す状態(図-2c)となり、上流移動する河床波が不明確になる。河床波の移動状況を示すために、図-4に右側壁近傍における河床変動量の時間変化を示す。この図は河床波の走時曲線を示しており、図中の左上に伸びる縞状のコンターが上流移動を示し、右上に伸びるものは下流移動する河床形態を意味する。図より、Case 1においては、波長の短い上流移動する河床形態のみが卓越していることがわかる。また、左上に伸びる同一の縞線上で、河床変動量が増減を繰り返しており、河床波が発達と消滅を繰り返していることがわかる。

一方、交互砂州形成条件であるCase 2は、比較的川幅が広い条件であるため、図-3aからわかるように計算初期には水路横断方向に複数の三角波が形成されている。計算が進むにつれて、この複数列の三角波はCase 1と同様に二次元的な形状に変化する(図-3b)。さらに時間が経過すると、これらの反砂堆よりも明らかに波長の長い河床波が表れるが(図-3c)、これは交互砂州に対応する。この段階になると、下流に移動する自由交互砂州と上流に移動する反砂堆が共存する形となる。河床形状の時間変化である図-4を見ると、左上に伸びる上流側に移動する成分と右上に伸びる下流側へ移動する成分が表れており、前者が反砂堆、後者が交互砂州に相当する。交互砂州が形成された時の反砂堆形状は比較的二次元的であるが、図-3cを見ると砂州の瀬に比較的明瞭な反砂堆とそれに伴う三角波が形成されている。この初期に複数列の三角波が発生する様子と、その後砂州の形成によって三角波の発生状況が変化する様子は、図-1に示す井上ら⁹の実験結果とも定性的には一致している。

(2) 考察

本数値計算結果を井上ら⁹の実験結果と定性的に比較すると以下のことがいえる。まず、本計算モデルは、水理条件を変化させると、実験と同じように異なる波長、横断方向の列数を持つ三角波が計算されている。これは、本モデルを用いることで、実際に様々な条件で発生する三角波の特性や発生条件などをより議論できる可能性がある。また、上述したように本モデルは、実験で見られたような三角波-反砂堆と交互砂州の同時形成を計算可能である。この反砂堆と共存する砂州の波長は実験では3.8 m程度であったのに対して、計算では4.5 m程度であり、実験結果を良好に再現しているといえる。これらは一般的に河川に適用される数値計算モデルでは表現出来ない点であり、ここで構築したモデルの優位性を示している。

しかし一方で、計算結果と実験結果に乖離がある点として、以下の事柄があげられる。まず、計算された反砂堆の波長は実験よりも長い。実験ではCase 1、2の条件における反砂堆の流下方向波長はそれぞれ22.5 cm、17.5 cmであったのに対し、数値計算ではそれぞれ35 cm、27 cm程度であった。また、実験における反砂堆は全て流

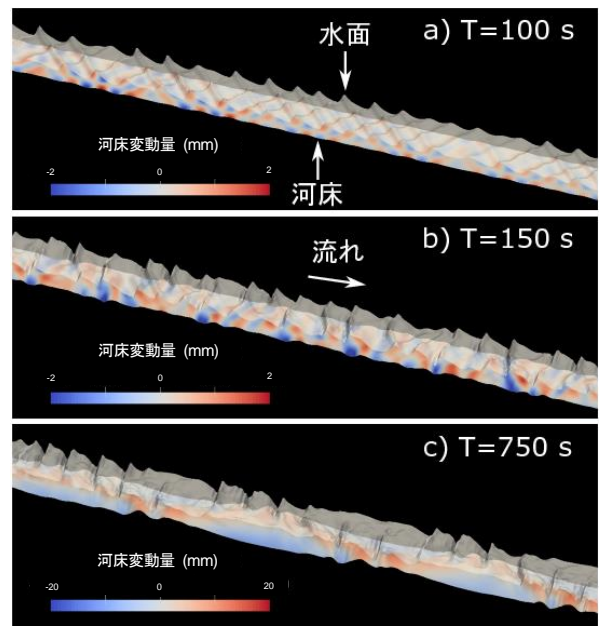


図-3 Case2の計算結果。

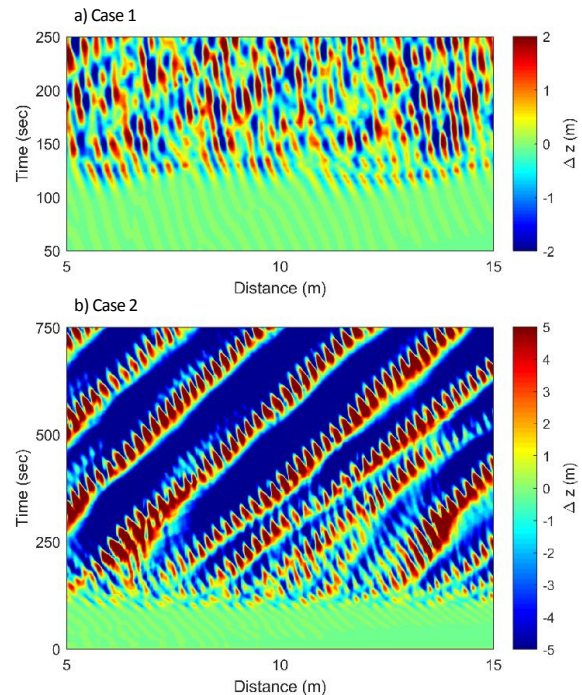


図-4 a) Case 1、b) Case 2における右岸側壁付近の河床変動量の時間変化。左上、右上に伸びる模様がそれぞれ上流、下流移動している河床形態を意味している。

下反砂堆であったが、計算された反砂堆は全て上流側に移動しており、実験結果を再現していない。さらに、実験においては、砂州が形成されない限り、横断方向にいくつかの列を持った反砂堆が比較的維持され得るが、数値計算結果においては、初期に形成された多列の三次元反砂堆は時間の経過とともに二次元的な形状に移行する。これらの点については、計算モデルが流下反砂堆を適切に再現出来ていないことに原因があると思われる。三角

波の再現にはその発生原因となる流下反砂堆を合理的に再現する必要があるが、そのためには、2. (1) で示したように、河床せん断力の評価が重要となる。今後は、この点をモデルに反映させ、より高精度かつ汎用性の高いモデルへと改良を行うとともに、現地スケールの現象に適用し、モデルの有用性について議論する必要がある。

4. 結論

本研究では、高流速条件下において発生する三角波を数値的に再現する手法について述べた。三角波を再現するためには、河床に形成される反砂堆を再現することが重要である。本研究では、比較的河川流—河床変動解析に扱いやすいことを狙い、流れの水深積分モデルである平面二次元ブシネスク方程式と非平衡掃流砂モデルを組み合わせたモデルを構築し、これを三角波に関する系統的な室内実験⁹⁾に適用した。その結果、構築したモデルは、三次元的な反砂堆の形成とそれにより発生する三角波を計算可能であることが示された。また、このような水面—河床の変動と同時に、従来のモデルでも解析可能な交互砂州の形成も計算可能であることを示した。

計算結果や実験結果を見ると、交互砂州が形成されている場合、三角波は水路中央よりも、より側壁にそった形で形成される。我が国において、交互砂州は一般的に見られる河川地形であり、この結果は、低水路河岸近傍においても三角波が発生することを示唆している。低水路河岸沿いに発生する三角波は、低水路護岸等河川構造物の被災リスクを増大させるものであり、そのようなリスクに関する検討、また水理量の推定において本モデルが適用できる可能性がある。本検討により、再現が難しい点も明らかとなったが、それらを改善しつつ、高流速とともに発生する特徴的な現象である三角波の再現性を改善していきたいと考えている。その上で、計算モデルを現地スケールの急流河川に適用し、モデルの性能を議論するとともに、計算結果から予期される三角波の発生条件、発生箇所、発生した際の流速などを用いて、具体的な高速流対策につなげていきたい。

謝辞：本研究の実施に当たり京都大学、音田慎一郎准教授からは多くのご助言を頂いた。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 山口甲：日本一の急流都市河川 豊平川，（財）河川環境管理財団北海道事務所，pp.126-130，2005.
- 2) 岩崎理樹・井上卓也・矢部浩規：三角波発生条件下におけるブロック安定性に関する実験，土木学会論文集 B1（水工学），Vol.74，No.4，pp.I_1207-1212，2017.
- 3) 国土開発技術研究センター編：改訂護岸の力学設計法，山海堂，pp.1-153，2007.
- 4) 山田正・池内正幸・堀江良徳：不規則底面をもつ開水路流れに関する研究，水理講演会論文集，第28巻，pp.149-155，1984.
- 5) 長谷川和義・山口甲・伊賀久晃・辻珠希：急勾配河川における三角状水面波列の発生条件について，平成21年度土木学会北海道支部論文報告集，第66号，B-1，2007.
- 6) 井上卓也・長谷川和義・渡部靖憲・船木淳悟：三次元的な反砂堆上の水面波に関する実験的研究，土木学会論文集 A2（応用力学），Vol.71，No.2，pp.I_739-I_746，2015.
- 7) 音田慎一郎・細田尚：水深積分モデルによる小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析，水工学論文集，第48巻，pp.973-978，2004.
- 8) 細田尚・余越正一郎・岩佐義朗：三次元波状路床上の流れに関する解析，広島大学工学部研究報告，Vol.33，pp.47-51，1983.
- 9) 内田龍彦・福岡捷二：浅水流の仮定を用いない水深積分モデルによる種々な小規模河床形態の統一的分析法の構築，土木学会論文集 B1（水工学），Vol.69，No.4，pp.I_1135-I_1140，2013.
- 10) Madsen, P.A. and Sørensen, O.R.: A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry, *Coastal Eng.*, Vol.18, pp.183-204, 1992.
- 11) 岩崎理樹・井上卓也・矢部浩規：三次元反砂堆のモデル化：三角状水面波列との関連性，土木学会論文集 B1（水工学），Vol.73，No.4，pp.I_901-I_906，2016.
- 12) Nakagawa, H. and Tsujimoto, T.: Sand bed instability due to bed load motion, *Proc. of ASCE*, Vol.106, HY12, pp.2029-2051, 1980.
- 13) Jang, C. and Shimizu, Y.: Numerical simulations of the behavior of alternate bars with different bank strengths, *J. Hydraul. Res.*, Vol.43, pp.596-612, 2005.
- 14) 鳴原良典・藤間功司：津波数値解析における分散波理論モデルの適用性と新しい数値計算法の提案，土木学会論文集 B，Vol.63，No.1，pp.51-66，2007.