

ついてもその透水量を推算するようにした。

む す び

本実験の結果については、昭和31年度において行なうので、さらに次の機会にその結果を発表する予定である。

55. 側溝余水吐内の流れの性質について

— Hinds 氏公式の研究 —

農業水産部土地改良課 長 高 連

側溝余水吐はダム余水吐の一種で、わが国ではダムサイトの地形上多数の使用例があり、その設計計算の方法としては、Hinds 氏または物部博士の方法が一般に用いられており、両者はややその解法を異にしているけれども大差がない。なかでも Hinds 氏の方法は、相当詳細に展開され、側溝内の流速 v を $v = ax^m$ なるごとく設計する積分型公式と、側溝内の2断面の運動量の対比より一定の底勾配(もちろん曲線勾配でもよいが)を持つ側溝内の水面曲線を追跡する近似式による方法の2種類がある。

この二式のうち積分型の方式は甚だ簡単で、複雑な余水吐の計算のなかでは、近似式による方法について正確な結果をあたえるが、ここに相当重大な仮定があり、この公式による結果と近似式による結果との間に考慮されるべき関連がある。さらに従来、側溝余水吐内部の流れの性質は、側溝の水路底勾配が1/15あるいは1/30のような、定流開水路では射流となる急勾配であることから、当然側溝内の流れも射流であるというあやまつた類推が一般に行なわれ、この仮定に立脚した解法も行なわれているのであるが、Hinds 氏と物部博士の公式により流れの性質を検討すれば、そのような事態にはならないと考えられる。一定の底勾配を持つ側溝内の流れの性質について、現在後述の証明では直ちにこの事柄を明かにすることはできないが、積分型の公式の場合については、実用的には十分でないかと思う。以下簡単にこの問題にふれたい。その前に積分型公式による解法を参考のため簡単に説明しておく。

図55-1によつて以下必要な数値ならびに諸式について説明すると

x = 側溝上流端の堰頂 A から堰頂に直角な側溝横断面 A_x に至る距離

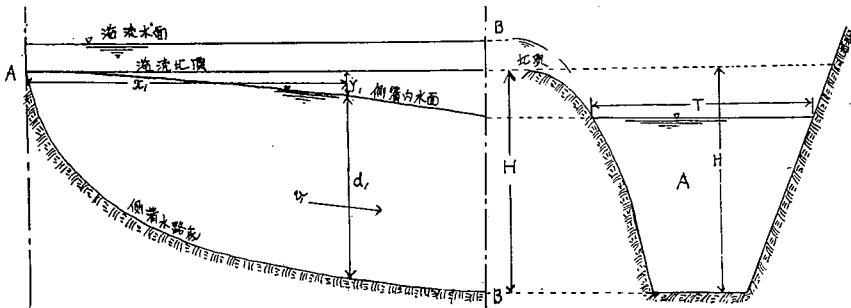


図 55-1

図 55-2

y = 横断面 A_x において堰頂と側溝内の水面との垂直距離

d = 側溝内の水深

$v = ax^n$ 横断面 A_x における流速

$$h_v = \frac{v^2}{2g} \quad \text{速度水頭}$$

$n = 0.4 \sim 0.8$ 位の任意の値

a = 後述の条件に従う値とする

$$y = \frac{a^2(n+1)}{2gn} x^{n+1} \quad \text{または} \quad \frac{n+1}{n} h_v \quad (1)$$

$$\frac{A^3}{T} = \frac{n+1}{n} \frac{\theta^2}{g} \quad (g = \text{重力加速度}) \quad (2)$$

θ = 設計洪水量

g = 単位堰頂長当りの設計洪水量の溢流量

A = 通水断面積

T = 水面幅

Hinds 氏の積分型公式の特徴は式 (1) に必要な側溝内の流速 v を $v = ax^n$ によつて定め、この n, a なる指数と係数を、図 55—1, 2 によるごとく側溝末端の堰頂より側溝水路底に至る垂直距離を最小とするという条件によつて定めるのである。この方法の意図は同一の側溝水路の横断面形で n がある値をとる側溝中で H を最小にする a の値を採用すれば、この n, a の組によつて定まる側溝が最も有利であるとの仮定によつている。その上で他の n について同様の操作を行ない、おのおの n に対応する最も適切な a をおのおの定め、こうしてできる $v_1 = a_1 x^{n_1}, a_2 x^{n_2} \dots a_m x^{n_m}$ なる流速条件でおのおの定まる各側溝の有利性を比較すれば、最終的に適切なしかも経済効果のよい側溝余水吐の形態が決定できることになるのである (筆者の経験ではこの意図は一般に適切である)。この方法は漠然とした、いかにして経済的な設計を行なうべきかという問題を、複雑な側溝余水吐の計算に巧妙に結びつけているもので、 $n > 1$ あるいは $n < 0.1$ は不適である (ここではその理由を述べる余裕がない) ので実際には n の数個の値について検討すればよいことになる。

解法は式 (2) において、今 n, Q, g が既知であるから右辺は既知となる。しかるとき例えば図 55—2 の側溝横断面で水深 d を仮定すれば A と T も定まる。この A と T を式 (2) の左辺に代入し、右辺の値と等しくなる d を試算により求め、 $Q/A = v$ より側溝末端の v を、 $v = ax^n$ (ここに x は堰頂の全長) より a を求めることができる。今度はかくして定まつた a と n を用いて次の計算を行なう。溢流堰頂の上流端 A より水平距離 x_1 (もちろん任意である) の側溝横断面の水面降下量 y_1 , 水深 d_1 を定めるために (図 55—1 参照) $v_1 = ax_1^n$ により v_1 を求め、この v_1 より h_{v1} を求め、あるいは直接に代入して式 (1) より y_1 を求める。また x_1 断面内の流量 qx_1 より、 $qx_1/v_1 = A_1$ として x_1 断面の水断面積 A_1 を求め A_1 に対応する d_1 を求める。かくして求まつたさまざまな数値、すなわち $y_1 + d_1, y_2 + d_2, \dots, y_n + d_n$ を A よりの距離の順に排列して堰頂より垂直にとれば、この各点を結ぶ曲線が求める側溝水路底であり、側溝余水吐の形態が定まるのである。しかしながらここに一つの問題がある。それは側溝内の流れは常流的であるか射流的であるかということである。射流的 (定流でないので射流的という) ならば側溝に接続する放水路の影響を受けないが、側溝内の流水が常流的ならば放水路の影響を受けて一般には側溝内の流れは変化する。放水路は急勾配水路であることが普通であるから、一般には側溝部と下流放水路との接続断面 (図 55—1 では B—B 断面) で限界水深が現れ、側溝内の水面は側溝末端付近で低下し、一種の低下背水がこの断面より上流の側溝内に現われるのであろう。

この問題を Hinds 公式の内包する性質から明らかにしようとするのが以下の証明である。このためには側溝内の各断面の流速が限界流速をこえることがないかどうかを検討すればよいから、側溝横断面形が三角形・矩形・梯形の各場合について検討する。

1. 側溝横断面形が三角形の場合 (2等辺三角形)

側溝各横断面を流れる流量 $Q=qx$, 各横断面の流速が限界流速なる場合の条件式は

$$\frac{A^3}{T} = \frac{Q^2}{g}$$

であるから, 図 55-3 により, $T=2d \tan \theta$, $A=d^2 \tan \theta$ とすれば

$$\frac{A^3}{T} = \frac{\theta^2}{g} \dots \dots \frac{d^6 \tan^3 \theta}{2d \tan \theta} = \frac{g^2 x^2}{g}$$

となる。 d について解いて, 限界水深であるから特に d を d_c で表わすと

$$d_c = \frac{2^{1/5} g^{2/5} x^{2/5}}{g^{1/5} (\tan \theta)^{2/5}} \quad (3)$$

$A=d^2 \tan \theta$ と式 (3) により d_c に対応する A_c は

$$A_c = \frac{2^{2/5} g^{4/5} (\tan \theta)^{1/5} x^{4/5}}{g^{2/5}} \quad (4)$$

となる。 $\frac{\theta}{A_c} = v_c$ (限界流速) であるから

$$v_c = \frac{g^{2/5} q^{1/5}}{2^{2/5} (\tan \theta)^{1/5}} x^{1/5} \quad (5)$$

となる。式 (5) を簡単のため

$$\frac{g^{2/5} q^{1/5}}{2^{2/5} (\tan \theta)^{1/5}} = a_c$$

として $v_c = a_c x^{1/5}$ である。

同ようにして側溝末端の堰頂距離 x_e をとり, 側溝末端において式 (2) を満足する v_e を求める。

限界流速の式 (5) を求めたと同様にして

$$v_e = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2/5} \frac{g^{2/5} q^{1/5}}{2^{2/5} (\tan \theta)^{1/5}} x_e^{1/5} \quad (6)$$

となる。このとき

$$\frac{g^{2/5} q^{1/5}}{2^{2/5} (\tan \theta)^{1/5}} = a_c$$

であるから

$$v_e = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2/5} a_c x_e^{1/5} \quad (7)$$

となる。 v_e はまた $v = a x_n$ なる関係式を満足すべきであるから

$$v_e = a x_e^n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2/5} \frac{g^{2/5} q^{1/5}}{2^{2/5} (\tan \theta)^{1/5}} x_e^{1/5}$$

より

$$v = a x_e^n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2/5} a_c x_e^{1/5-n} x_e^n$$

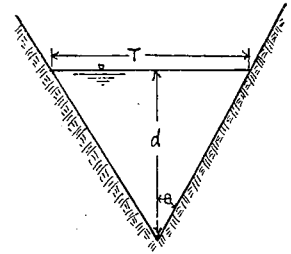


図 55-3

ゆえに

$$a = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2/5} a_c x_e^{1/5-n}$$

であるから

$$v = a x^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2/5} a_c x_e^{1/5-n} x^n \quad (8)$$

となる。式(5)と式(8)を比較して側溝内各断面において $v_c > v$ なる条件を満足する x と n の範囲を求めればよい。式(5)と式(8)により

$$\begin{aligned} a_c x^{1/5} &> \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2/5} a_c x_e^{1/5-n} x^n \\ \therefore \left(\frac{x}{x_e}\right)^{1/5-n} &> \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2/5} \\ \therefore \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2/5} &> \left(\frac{x}{x_e}\right)^{n-1/5} \end{aligned}$$

$\frac{n+1}{n} > 1$ であるから $n^{-1/5} > 0$ なるときは

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{2/5}{n-1/5}} &> \left(\frac{x}{x_e}\right) \quad (x_e > x \text{ とす}) \\ \therefore \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{2/5}{n-1/5}} x_e &> x_e > x \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)によつて $n > 0.2$ のときは x_e より小なる x は確実に $v_c > v$ なる条件を満足している。

さらに $n < 0.2$ なるときは

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2/5} &> \left(\frac{x}{x_e}\right)^{-1/5+n} \\ \therefore \left(\frac{x}{x_e}\right)^{1/5-n} &> \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2/5} \\ \therefore x &> \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{2/5}{1/5-n}} x_e \end{aligned} \quad (10)$$

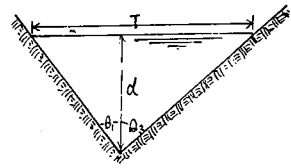
式(10)なる範囲に限り $v_c > v$ なる条件を満足することがわかる。この範囲が $0.2 > n$ なる n については、実際上使用するに支障ない範囲であるかないかは数値を計算すべきであり、この問題については後に一括して述べる。

不等辺三角形においても結果は同ようであり式(9)、式(10)の形に変化はないが図55-4により

$$T = d(\tan \theta_1 + \tan \theta_2), \quad A = \frac{d^2}{2} (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)$$

$$a_c = \frac{g^{2/5} q^{1/5}}{2^{1/5} (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)^{1/5}}$$

となる。



2. 側溝横断面形が矩形の場合

1. と同ような計算過程による。今結果を記すと、図55-5により $T=B$, $A=Bd$

$$\frac{A^3}{T} = \frac{B^3 d^3}{B} = B^2 d^3 = \frac{q^2 x^2}{y}$$

$$\therefore d_c = \frac{q^{2/3} x^{2/3}}{B^{2/3} g^{1/3}}$$

また

$$A_c = \frac{B^{1/3} q^{2/3} x^{2/3}}{g^{1/3}}$$

$$\therefore v_c = \frac{g^{1/3} q^{1/3}}{B^{1/3}} x^{1/3}$$

$$\alpha_c = \frac{g^{1/3} q^{1/3}}{B^{1/3}}$$

とすると

$$v_c = \alpha_c x^{1/3} \tag{11}$$

次に $v_e = a x_e^n$ を同ようにして求めると

$$v_e = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/3} \alpha_c x_e^{1/3-n} x_e^n$$

$$\therefore a = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/3} \alpha_c x_e^{1/3-n}$$

となり

$$\therefore v = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/3} \alpha_c x_e^{1/3-n} x^n \tag{12}$$

式(11)と式(12)より $v_c > v$ なる x の条件を求めると

$$\alpha_c x^{1/3} > \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/3} \alpha_c x_e^{1/3-n} x^n$$

$$\therefore \left(\frac{x}{x_e} \right)^{1/3-n} > \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/3}$$

$$\therefore \left(\frac{n+1}{n} \right)^{1/3} > \left(\frac{x}{x_e} \right)^{n-1/3}$$

ゆえに、 $n > 1/3$ なるとき

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^{1/3} > 1$$

より

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^{1/3} x_e > x_e > x \tag{13}$$

となり、 $x_e > x$ なる範囲の x については確実に $v_c > v$ なる条件が成立する。

$n < 1/3$ なるときは

$$x > \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/3-n} x_e \tag{14}$$

なる範囲が実用上妥当であるかどうか $1/3 > n > 0.1$ の n の範囲について数値上より計算してみるべきで、この計算も一括して後述する。

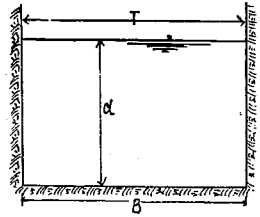


図 55-5

3. 側溝横断面が梯形の場合 (近似的に)

梯形水路を1, 2の方法で考えることは、計算過程が困難で明らかな結果がえられないので、問題を近似的に処理し、梯形水路の連続する水面の小さな水深の変化に対応する水断面積と水面幅は、指数により近似的に表わしうることによつて問題を考えることにする。

今水断面積 A を水深 d の函数として指数型式として $A = \alpha d^m$ とすれば、 $dA = T d d$ より $T = \alpha m d^{m-1}$ となる。図 55-6 の梯形水路において、底幅を B とし、2水深 $k_1 B, k_2 B$ による水面が側壁に接する位置 l, l', p, p' を通る函数形を決定するには

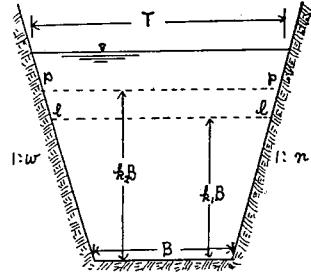


図 55-6

$$w + n = z$$

として

$$\alpha m (k_1 B)^{m-1} = (B + 2k_1 B)$$

$$\alpha m (k_2 B)^{m-1} = (B + 2k_2 B)$$

$$\therefore \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{m-1} = \left(\frac{1+2k_2}{1+2k_1}\right)$$

$$\therefore m-1 = \frac{\log(1+2k_2) - \log(1+2k_1)}{\log k_2 - \log k_1} \quad (15)$$

$z = 1.2$ とし式(15)を用い種々な k_1, k_2 の組について m を計算した結果を表 55-1 に示す。

表 55-1

$k_2 \sim k_1$	$m-1$	m	$k_2 \sim k_1$	$m-1$	m
0.3~0.1	0.176	1.176	2.0~1.5	0.674	1.674
0.5~0.3	0.318	1.318	2.5~2.0	0.728	1.728
0.8~0.5	0.431	1.431	3.0~2.5	0.766	1.766
1.0~0.8	0.517	1.517	3.5~3.0	0.795	1.795
1.5~1.0	0.594	1.594			

式(15)から

$$\lim_{\substack{k_1 \rightarrow 0 \\ k_2 \rightarrow 0}} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{m-1} = \lim_{\substack{k_1 \rightarrow 0 \\ k_2 \rightarrow 0}} \left(\frac{1+2k_2}{1+2k_1}\right) = \lim_{\substack{k_1 \rightarrow 0 \\ k_2 \rightarrow 0}} \left(\frac{1+2k_1+2k_2-2k_1}{1+2k_1}\right) = 1 + \lim_{\substack{k_1 \rightarrow 0 \\ k_2 \rightarrow 0}} \left(\frac{2k_2-2k_1}{1+2k_1}\right) = 1$$

$$\therefore m-1 = 0 \quad m = 1$$

また

$$\lim_{\substack{k_1 \rightarrow \infty \\ k_2 \rightarrow \infty}} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{m-1} = \lim_{\substack{k_1 \rightarrow \infty \\ k_2 \rightarrow \infty}} \left(\frac{1+2k_2}{1+2k_1}\right) = \lim_{\substack{k_1 \rightarrow \infty \\ k_2 \rightarrow \infty}} \left\{ \frac{\frac{1}{k_1} + 2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)}{\frac{1}{k_1} + 2} \right\}$$

ゆえに k_1, k_2 を相当大きくとれば

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{m-1} \doteq \left(\frac{k_2}{k_1}\right)$$

であるから

$$\therefore m-1 = 1 \quad m = 2$$

ゆえに梯形水路は水深が底幅に比して小さくなれば、その性質は矩形水路に近く、水深が底幅に比して大きくなれば、その性質が三角形水路に近くなると考えてよく、また、 $A = a d^m$ は各種横断面形の性質を示すに便利な一般形であると、この場合には仮定してよいであろう。この $A = a d^m$ なる函数を使って、梯形水路の場合を近似的に考えてみると次のようになる。

$T = \alpha m d^{m-1}$ であるから、1, 2 と同様の計算手続により

$$v_c = \left(\frac{q g^m}{\alpha m^m} \right)^{\frac{1}{2m+1}} x^{\frac{1}{2m+1}}$$

ここに

$$\alpha_c = \frac{q g^m}{\alpha m^m}$$

$$\therefore v_c = \alpha_c x^{\frac{1}{2m+1}} \quad (16)$$

$$v_e = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{m}{2m+1}} \left(\frac{q g^m}{\alpha m^m} \right)^{\frac{m}{2m+1}} x_e^{\frac{1}{2m+1}}$$

$$\therefore v = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{m}{2m+1}} \alpha_c x_e^{\frac{1}{2m+1} - n} x^n \quad (17)$$

次に式(16), (17)より $v_c > v$ なる関係を満足する条件を求めると $n > \frac{1}{2m+1}$ なるとき $x_e > x$ として

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{m}{2m+1} / n - \frac{1}{2m+1}} x_e > x_e > x \quad (18)$$

$n < \frac{1}{2m+1}$ なるときは

$$x > \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{m}{2m+1} / \frac{1}{2m+1} - n} x_e \quad (19)$$

式(19)を満足する x の値を $\frac{1}{2m+1} > n > 0$ の範囲の n について求め、実用上支障のない x の範囲を定めるべきである。

通常の側溝横断面形は、近似的にはその横断面形が三角形・矩形、あるいはこれらの形に近いが、またはその水深に応じて、 $2 > m > 1$ の範囲の m の値を彙とする函数によつて表わされると考えてよいであろう。すなわち図 55-6 の梯形水路の各水深の区間はその k_1, k_2 の値によつて、表 55-1 に示した m の値を彙とする類似拋物線形水路と近似的に同様の能力を持つと仮定することができる。今一括して $2 > m > 1$ の範囲の m 数個をえらび、このおのおの m について $\frac{1}{2m+1} > n > 0$ の範囲の n の値数個について式(19)を満足する x を求めれば側溝内の流れの状況は一般に解決されると考えてよいであろう。式(19)に、 $m=2$ または $m=1$ を代入すれば式(10)と式(14)になることは明らかである。表 55-2 によつてその結果を示す。ただし 0.1 以下の n の値については、前述のごとく別途の理由により、実用上適当でないことが明らかにされるからここに検討しない。

表 55-2 によれば、 $2 > m > 1$ の範囲においては、 $\frac{1}{2m+1}$ は $m=1$ の場合を除いていづれもその値は 0.3 より小さく、 n の値が $1 > n > 0.3$ の場合には、側溝内の流れは側溝横断面形が矩形の場合以外は、いづれも限界流速より小さい流速を持ち、したがつて側溝内の水深は限界水深より大きくなる。 n の値が $0.3 > n > 0.1$ の範囲においても、 $n=0.2, n=0.1$ の場合に、その最大の値で側溝上流端より約堰全長の 3/100 の範囲の流速が理論的には限界流速より大きくなるが、通常はこの範囲がはるかに小さいことは表の値が示すごとくで、最大の場合にも側溝内の流れは、流れの乱れからこの状況を示すと考える必要はなく、 n の値が $1.0 > n > 0.1$ の範囲においては側溝

表 55-2

n	m	$\frac{1}{2m+1}$	$\frac{m}{2m+1}$	$\frac{1}{2m+1} - n$	p	$p \log \frac{n}{n+1}$	$x > \beta x_e$
0.1	1.00	0.333	0.333	0.233	1.42	(-1.4787776)	$> 0.0332 x_e$
	1.18	0.297	0.351	0.197	1.78	(-1.8536790)	$> 0.0140 x_e$
	1.32	0.274	0.362	0.174	2.08	(-2.1660968)	$> 0.0068 x_e$
	1.43	0.259	0.370	0.159	2.32	(-2.4160311)	$> 0.0038 x_e$
	1.59	0.239	0.380	0.139	2.73	(-2.8430021)	$> 0.0014 x_e$
	1.73	0.224	0.387	0.124	3.12	(-3.2491452)	$> 0.0005 x_e$
	1.80	0.217	0.391	0.117	3.33	(-3.4678377)	$> 0.0003 x_e$
	2.00	0.200	0.400	0.100	4.00	(-4.1655708)	$> 0.00007 x_e$
0.2	1.00	0.333	0.333	0.133	2.50	(-1.9453782)	$> 0.0113 x_e$
	1.18	0.297	0.351	0.097	3.61	(-2.809126)	$> 0.0015 x_e$
	1.32	0.274	0.362	0.074	4.89	(-3.8051598)	$> 0.0001 x_e$
	1.43	0.259	0.370	0.059	6.27	(-4.8790086)	$> 0.00001 x_e$
	1.59	0.239	0.380	0.039	9.74	- 8. —	$> 10^{-8} x_e$
	1.73	0.224	0.387	0.024	16.12	-13. —	$> 10^{-13} x_e$
	1.80	0.217	0.391	0.017	23.00	-18. —	$> 10^{-18} x_e$
	2.00	0.200	0.400	—	—	—	—
0.3	1.00	0.333	0.333	0.033	10.09	(-8.8293685)	$> 10^{-9} x_e$

$$p = \frac{m}{2m+1} \left/ \left(\frac{1}{2m+1} - n \right) \right. \quad \log \left(\frac{n}{n+1} \right) = (-1.0413927) \quad (n=0.1)$$

$$\beta = \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = (-0.7781513) \quad (n=0.2)$$

$$= (=0.8750613) \quad (n=0.3)$$

内の流れは常に限界水深より大きい水深を以て流れるごとく、Hinds 氏の積分型の公式は成立していると考えてよいであろう。

以上の解によつて、次の事柄が考えられるべきことを指摘しておく。

(a) Hinds 氏の積分型による解法で、側溝末端の H なる量を最小にする側溝の設計においては、その側溝内の水深は一般には全側溝で常流の水深となる。しかもこの場合、通常側溝水路底の勾配は 1/30 以上の急勾配であるが、定流の開水路の類推から、この流れが射流的であるとする誤りをおかしやすいことに注意すべきである。

(b) 側溝内の水深が限界水深より大きいから側溝末端の水深は、これに接続する放水路の水面によつて決定され、通常放水路は急勾配水路であるから、側溝末端の水深は限界水深となり、側溝内の水面はやや低下し Hinds 氏の近似式による解法で修正せねばならない。

(c) 積分型公式は一般に近似式による解法の手段として有用であるとみなされる。

(d) 放水路の勾配はそれが急勾配であるかぎり、側溝部にあたえる影響は同一で、接続放水路の勾配が急であるほど側溝余水吐の能力が増大するわけではない。